CURSO DE CÁLCULO

MÓDULO 3: DERIVADAS

SUMÁRIO

3.1 - Reta Tangente

3.2 - Velocidades

3.3 - Valores Máximo e Mínimo

3.4 - O Teorema do Valor Médio

3.5 - Como as Derivadas Afetam a Forma do Gráfico

3.5.1 - Traçado do Gráfico de uma Função

3.6 - Formas Indeterminadas e a Regra de L' Hôpital

3.6.1- Introdução

3.6.2- Regra de L' Hôpital

3.6.3- Indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$

3.6.4- Outras Formas Indeterminadas

3.6.5- Aproximações por Polinômios

3.6.6- Polinômios de Taylor

3.7 - Problemas de Otimização

3.8 - Aplicações em Economia

3.9 - O Método de Newton

Unidade 1- Derivadas

1.1- Introdução

O desenvolvimento dos estudos matemáticos acompanhou a necessidade do homem de conhecer melhor o universo físico que o cerca. Particularmente, o Cálculo teve sua aplicação estendida aos fenômenos físicos mensuráveis.

O Cálculo Diferencial surgiu no final do século XVII por estudos de Isaac Newton e Gottfried Leibniz, tornando-se a base para o desenvolvimento de vários campos da Matemática, além de possuir aplicação em quase todas as áreas do conhecimento científico.

Muitos fenômenos físicos envolvem grandezas que variam, por exemplo: a posição e a velocidade de um foguete ou satélite, a inflação da moeda, o crescimento do número de bactérias em uma cultura, a população de um país, a intensidade de terremotos, a voltagem de um sistema elétrico, e assim por diante.

A noção de derivada aparece sob dois aspectos: um ligado à ideia geométrica de tangente a uma curva e o outro relativo ao conceito de "taxa de variação" de uma grandeza, por exemplo, a "velocidade instantânea" em Cinemática. Esses dois aspectos têm consequências, tanto na análise de gráficos e na variação das funções, como no estudo da evolução de grandezas que possuem regularidades expressas por leis matemáticas de grande precisão.

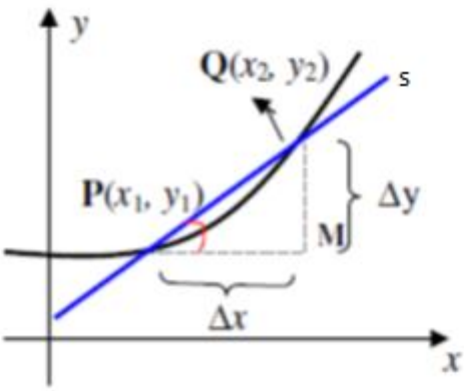
Dessa forma, observamos que a derivada é uma ferramenta matemática usada para estudar taxas nas quais variam as grandezas físicas. Assim é importante estudar a estreita relação que existe entre taxas de variação e retas tangentes a gráficos.

Muitos problemas importantes de Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto dela. Conhece-se da Geometria Plana que a reta tangente em um ponto de uma circunferência é a reta que tem com essa circunferência um único ponto comum. Essa definição não se aplica a uma curva em geral.

Exemplo:

De acordo com a figura acima, a reta tangente à curva no ponto P intersecta a curva no ponto Q.

Muitos problemas do Cálculo envolvem a determinação da reta tangente a uma curva dada, em um determinado ponto da mesma. O problema de encontrar a reta tangente em um ponto P (x,y) da curva consiste no cálculo da inclinação da reta procurada; ou seja a tangente é determinada por sua inclinação e pelo ponto de tangência.



Na figura acima, sejam P (x_1, y_1) e Q(x_2, y_2) dois pontos distintos de uma curva e s a reta secante que passa por esses pontos. Considerando o triângulo PMQ formado, tem-se que a inclinação da reta s (ou o coeficiente angular da reta s) é determinada por

$$m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Suponhamos que mantendo P fixo, Q se mova sobrea curva em direção a P. À proporção que Q se aproxima de P a inclinação da reta secante s varia cada vez menos, tendendo para um valor limite constante. Esse valor limite mostra a inclinação da reta tangente à curva no ponto P dado por

$$m = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{Q \to P} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

quando o limite existir. Fazendo $x_2 = x_1 + \Delta x$, pode-se reescrever a expressão anterior na forma

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

Desse modo, tendo o coeficiente angular e um ponto P de tangência pode-se encontrar a equação da reta tangente nesse ponto P. O denominador Δx é a variação de x enquanto o numerador Δy é a variação de y. O quociente Δy por Δx fornece a taxa de variação.

Assim, estudaremos o conceito de derivada relacionado com o conceito de limite e veremos que a derivada de uma função é o limite de um quociente de duas grandezas em que ambas tendem a zero.

Lembrete:

Considerando o ponto P como fixo e o ponto Q como móvel, ao longo da curva em direção a P, isto é, Q tendendo a P, equivale a dizer que Δx tende a zero. Quando isso ocorre, a reta secante gira em torno do ponto P fixo. Se a reta secante tiver uma posição limite como sendo a da reta tangente ao gráfico f em P, a inclinação da reta tangente ao gráfico em P será o limite de m_{PQ} quando Δx tende a zero, se esse limite existir. Se $\lim_{\Delta x \to 0} m_{PQ}$ for $+\infty$ $ou -\infty$, à medida que Δx tende a zero, a reta PQ aproxima-se da reta por P, que é paralela ao eixo y. Nesse caso, a reta tangente ao gráfico em P é a reta $x = x_1$. Isso nos leva à definição:

Suponhamos que a função f seja contínua em x_1. A **reta tangente** ao gráfico de f no ponto $P(x_1, f(x_1))$ é

(i) a reta por P tendo inclinação $m(x_1)$, dada por

$$m(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

se o limite existir;

(ii) a reta $x = x_1$ se

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} \text{ for } +\infty \text{ ou } -\infty$$

Para simplificar a escrita vamos transformar:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

em

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Assim, a derivada de uma função f em um número a, denotado por f'(a), é

$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, se o limite existe.

Se escrevermos x = a + h, então h = x – a, e h tende a zero se e somente se se x aproximar-se de a. Dessa forma, a definição da derivada pode ser enunciada como

$$f\,'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Observação: A derivada de f em a é indicada por f '(a)(leia: f linha de a).

Exemplos:

1) Encontre a derivada da função f(x) = x^2 – 8x + 9 em um número a.

Solução: Da definição temos:

$$f\,'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - (a^2 - 8a + 9)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h} \quad = \lim_{h\to 0} \frac{h(2a + h - 8)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}(2a + h - 8) = 2a - 8$$

2) Seja f(x) = x². Calcule

i) f ’ (1).

ii) f ’ (x).

iii) f ’(– 3)

Solução:

i) Da definição temos: $f\,'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$$f\,(1)' = \lim_{x\to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1)$$
$$= \lim_{x\to 1}(1+1) = 2$$

ii) Da definição temos: $f\,'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} =$$
$$\lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,(2x+h)}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h) = 2x$$

Portanto, f(x) = x² → f ’(x) = 2x .

Observação: f ’(x) = 2x é uma fórmula que nos dá a derivada de f(x) = x², em todo x real.

iii) De f(x) = x² → f ’(x) = 2x , temos que f ’(– 3) = 2. (– 3) = – 6.

3) Ache a derivada de f se f (x) = 3x² + 12.

Solução: Da definição temos:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x+h)^2+12]-(3x^2+12)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[3(x^2 + 2xh + h^2) + 12] - (3\,x^2\ +\ 12)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 + 12 - 3\,x^2\ -\ 12}{h}$$

$= \lim_{h\to 0} \frac{6xh+3h^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h\,(6x+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(6x + 3h)$= 6x

4) Seja $f(x) = \sqrt{x}$. Calcule f '(2).

Solução: Da definição temos: $f\,'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

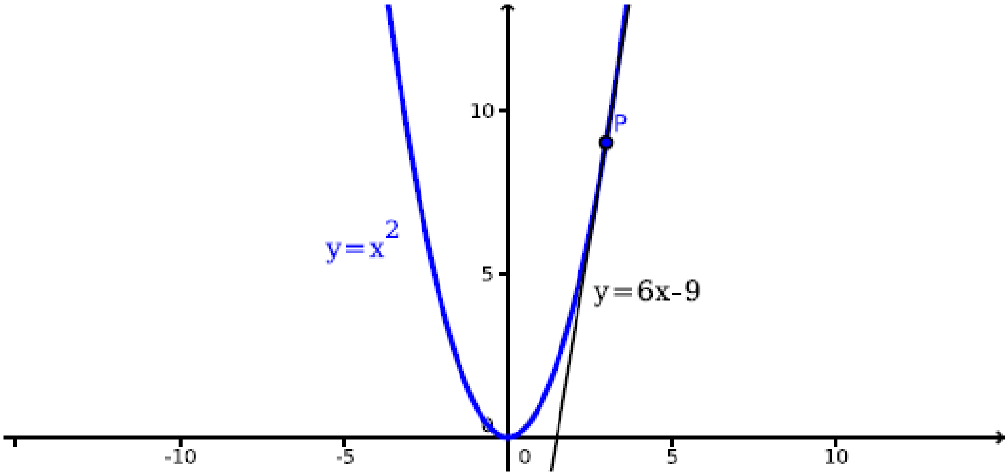
$f\,'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} \qquad = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \qquad = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$

$= \lim_{x\to 2} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\,\sqrt{2}}$

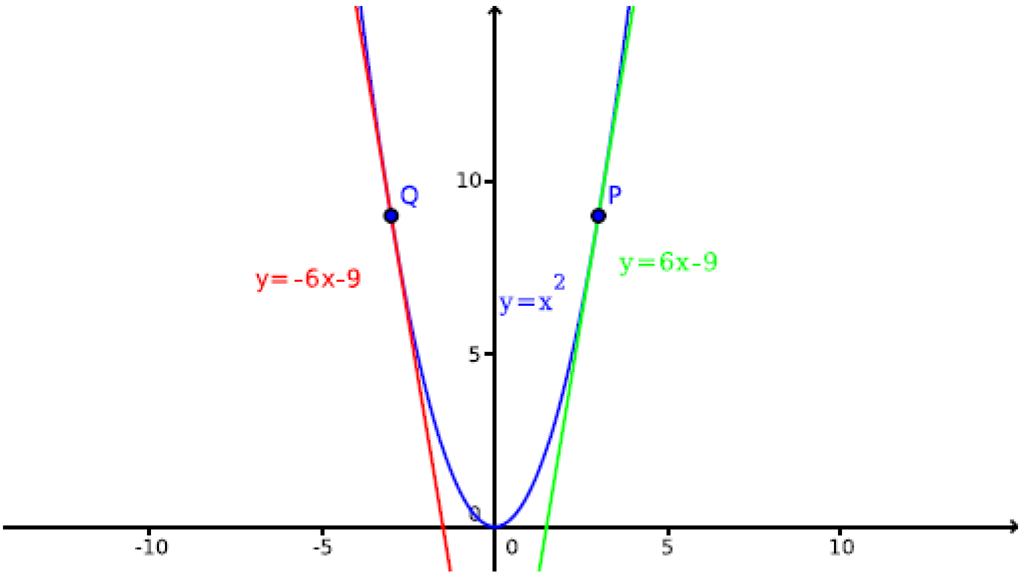
5) Calcule a equação da tangente à curva y = x^2 no ponto x = 3.

Solução: Como $\frac{dy}{dx} = 2x$, então $\frac{dy}{dx}|_{x=3} = 2.3 = 6$. Portanto, a reta tangente tem coeficiente angular a = 6. A equação da reta dada por y = ax + b ou y = 6x + b, sendo b o coeficiente linear da reta, que ainda deverá ser calculado conhecendo um ponto da reta. Como a reta corta a parábola y = x² no ponto de abscissa 3, esse ponto possui ordenada y = 3² = 9. Substituindo o ponto de tangência (3,9) na equação da reta vamos obter o coeficiente linear:

y = 6x + b → 9 = 6.3 + b → b = 9 – 18 = – 9. A equação da reta é y = 6x – 9.



Para essa mesma função, o cálculo do coeficiente angular nos pontos x=– 3 e x = 0 resulta em $\frac{dy}{dx}|_{x=-3} = 2.(-3) = -6$ e $\frac{dy}{dx}|_{x=0} = 2.0 = 0$. Dessa forma a reta tangente em x= – 3 é decrescente (reta y = – 6x – 9) e a reta tangente em x = 0 é horizontal (coeficiente angular nulo).



Notações:

Existem várias formas para indicar a derivada de uma função y= f(x), num ponto x_0:

1) $f'(x_0)$

2) $\frac{df}{dx}(x_0)$

3) $\frac{dy}{dx}$

Na notação 3 não fica explícito o ponto em que a derivada está sendo calculada. Quando for necessário pode-se indicar por:

$\frac{dy}{dx}|_{x_0}$ ou $\frac{dy}{dx}(x_0)$

O símbolo $\frac{dy}{dx}$ como notação para a derivada foi introduzido pelo matemático alemão Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). No século XVII

Leibniz e Isaac Newton (1642 – 1727), trabalhando independentemente, introduziram quase ao mesmo tempo o conceito de derivada. Provavelmente Leibniz considerava dx e dy como pequenas variações nas variáveis x e y e a derivada de y em relação a x como a razão de dy por dx quando dy e dx tornam-se pequenos. O conceito de limite não era conhecido por Leibniz.

A notação f' para a derivada de uma função f, foi introduzida por Joseph Lagrange no século XVIII, é a notação preferida sempre que são necessárias a precisão e absoluta clareza. Na notação de Lagrange, o valor da derivada em x = x_1 é indicado por $f'(x_1)$.

Com a notação de Leibniz escreveríamos $\left.\frac{dy}{dx}\right]_{x=x_1}$. O símbolo para derivada $\frac{dy}{dx}$ não deve ser considerado como uma razão. Na verdade $\frac{d}{dx}$ pode ser considerado como um operador (um símbolo para a operação de cálculo da derivada) e quando escrevemos $\frac{dy}{dx}$, isto significa $\frac{d}{dx}(y)$, ou seja, a derivada de y em relação a x.

1.2- A Derivada Como Função

Já vimos anteriormente que a derivada de uma função f em um número fixo a é:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Agora vamos variar o número a e substituí-lo por uma variável x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Dado um número x para o qual esse limite existe, atribuímos a x o número $f'(x)$. Dessa forma podemos considerar f' como uma nova função, denominada de **derivada de $\boldsymbol{f}$**. Sabemos que o valor de f' em x, $f'(x)$, pode ser interpretado geometricamente como a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto (x, $f'(x)$).

Desde que a função f' é derivada da função original f, é chamada "derivada" de f', temos as seguintes definições:

DEFINIÇÃO 1:

Dada uma função f , a função f' definida por

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ é chamado a derivada de f.

Na definição fica subentendido que o domínio da função derivada f' é o conjunto de todos os números x no domínio de f para os quais o limite do quociente de diferença existe. No cálculo desse limite, deve-se tratar x como uma constante enquanto se faz h tender a zero.

Exemplos:

1) Calcule $f'(x)$ para a função f(x) = x^3.

Solução: Da definição temos:

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{h\,(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0}(3x^2 + 3xh + h^2) = 3x^2$$

2) Calcule $f'(x)$ para a função $f(x) = \frac{1}{3x-2}$.

$$f\,'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{3(x+h)-2}-\frac{1}{3x-2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(3x-2)-[3(x+h)-2]}{h[3(x+h)-2](3x-2)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{(3x-2)-[3x+3h-2]}{h[3(x+h)-2](3x-2)} = \lim_{h\to 0}\frac{3x-2-3x-3h+2}{h(3x+3h-2)(3x-2)} = \lim_{h\to 0}\frac{-3\,h}{h(3x+3h-2)(3x-2)} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{-3}{(3x+3h-2)(3x-2)} = \frac{-3}{(3x-2)(3x-2)} = \frac{-3}{(3x-2)^2}$$

DEFINIÇÃO 2:

Uma função é dita diferenciável em um número x se f é definida pelo menos em algum intervalo aberto contendo x e $f'(x)$ existe e é finita. A função f é diferenciável em x se e somente se ambas as derivadas laterais $f'_+(x)$ e $f'_-(x)$ existem e possuem o mesmo valor finito.

Uma função f é diferenciável no intervalo aberto (a, b) [ou (a, ∞) ou $(-\infty, a)$ ou $(-\infty, \infty)$] se for diferenciável em cada número no intervalo. Se uma função é diferenciável para cada número em seu domínio, é chamada uma função diferenciável.

Geometricamente, dizer que uma função f é diferenciável em um número x é dizer que o gráfico de f tem uma tangente com coeficiente angular $f'(x)$ no ponto (x, $f'(x)$). Se um gráfico tem uma reta tangente em um ponto, não pode ter uma descontinuidade no ponto.

Exemplos:

1) Onde a função $f\ (x) =\ |x|$ é diferenciável?

Solução:

Se x > 0, então |x| = x e podemos escolher h suficientemente pequeno tal que x + h > 0 e ainda |x + h| = x + h. Consequentemente , para x > 0, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |\ x\ |}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

e f é diferenciável para qualquer x > 0.

Analogamente, para x < 0 temos |x| = – x e podemos escolher h suficientemente pequeno tal que x + h < 0, e assim |x + h| = – (x + h). Portanto, para x < 0,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{|x+h| - |\ x\ |}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-(x+h) - (-x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0}(-1) = -1$$

e assim f é diferenciável para qualquer x < 0.

Para x = 0 temos de verificar

$f'(0) =\ \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|0+h|-|0|}{h}$ (se ele existe)

Vamos computar os limites esquerdo e direito:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0^+} 1 = 1$$

e

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{|0+h| - |0|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = \lim_{h\to 0^-} (-1) = -1$$

Como esses limites são diferentes, f'(0) não existe. Assim, f é diferenciável para todo x, exceto em 0 (zero).

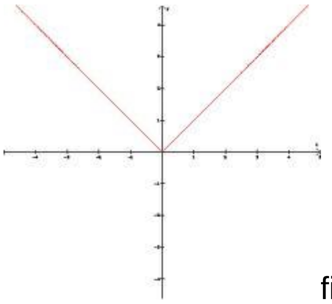


figura 1: y = f(x) = |x|

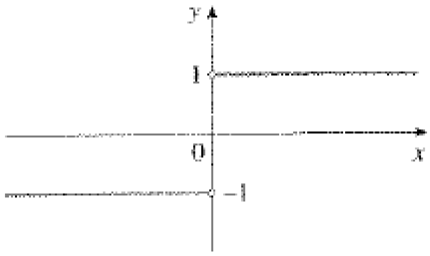


figura 2: y = f ‘ (x)

Uma fórmula para f’ é dada por $f'(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$ (figura 2).

O fato de que f ’(0) não existe está refletido geometricamente no fato de que a curva y = |x| não tem reta tangente em (0,0) (figura 1).

1.2.1- Diferenciabilidade e Continuidade

Toda função derivável é contínua, no entanto, mesmo funções contínuas em todo o seu domínio podem não ser deriváveis em alguns dos pontos de seu domínio. Há casos de funções contínuas em toda reta real e que não são deriváveis em nenhum ponto do seu domínio.

Teorema 1: Se a função f é derivável em *a* , então f é contínua em *a*.

Demonstração:

$$\text{f é derivável em } a \Rightarrow f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \overset{x=a+h}{=\!=} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a)\right) = \lim_{x \to a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a}(x - a)\right) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \to a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a) + f(a)\right) = \lim_{x \to a} \left(f(x) - f(a)\right) + \lim_{x \to a} f(a) = 0 + f(a) = f(a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{f é contínua em } a$$

Observações:

i) Como consequência do teorema anterior, temos que: f não é contínua em a $\Rightarrow$ f não é derivável em a.

ii) A recíproca do teorema 1 não é verdadeira, isto é, uma função pode ser contínua em a e não ser derivável em a.

iii) Dizemos que a função f = f(x) é diferenciável se f é derivável em todo a ϵ Dom f.

iv) Se a função f é diferenciável em a, então f é contínua em a.

v) Se a função f é não é contínua em a, então f não é diferenciável em a.

vi) Se a função f é não é contínua, então f não é diferenciável.

vii) Apenas sabendo que f é contínua em a, nada podemos afirmar sobre a diferenciabilidade de f em a.

Exemplos:

1) Estude a continuidade e a diferenciabilidade das seguintes funções.

a) $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 se\ x \le -1 \\ x^2\ se\ x > -1 \end{cases}$

Solução:

♦ CONTINUIDADE :

• se $a < -1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x < -1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2 - x^2) = 2 - a^2 = f(a) \ ,\ \forall a < -1 \Rightarrow \text{ f é contínua em todo } a < -1$$

• se $a > -1$, $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2) = a^2 = f(a) \ ,\ \forall a > -1 \Rightarrow \text{ f é contínua em todo } a > -1$$

• se $a = -1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x \le -1$ e $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (2 - x^2) = 2 - (-1)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2) = (-1)^2 = 1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1) = 2 - 1^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ f é contínua em } -1$$

Conclusão : f é contínua em todo $a \in \mathbb{R} = \text{Dom} f$ $\Rightarrow$ **f é uma função contínua**

♦ DIFERENCIABILIDADE :

- se $a < -1$, $\quad f(x) = 2 - x^2$, para todo $x < -1$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2-(a+h)^2\right) - \left(2-a^2\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2-a^2-2ah-h^2\right)-\left(2-a^2\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2ah-h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-2a-h\right) = -2a \ , \ \forall a < -1 \ \Rightarrow \ f \text{ é diferenciável em todo } a < -1$$

- se $a > -1$, $\quad f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a^2+2ah+h^2)-a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah+h^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(2a+h\right) = 2a \ , \ \forall a < -1 \ \Rightarrow \ f \text{ é diferenciável em todo } a > -1$$

- se $a = 1$, $\quad f(x) = 2 - x^2$, para todo $x \le -1$ e $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

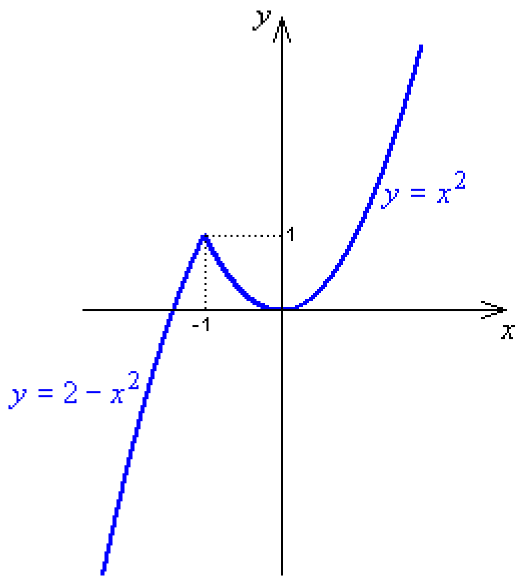
$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-1) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\left(2-(-1+h)^2\right)-\left(2-(-1)^2\right)}{h} = \\ \quad = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\left(2-(-1)^2-2\cdot -1\cdot h-h^2\right)-\left(2-(-1)^2\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{2\cdot 1\cdot h-h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \left(2-h\right) = 2 \\ f'_+(-1) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(-1+h)^2-\left(2-(-1)^2\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(1^2+2\cdot -1\cdot h+h^2)-1}{h} = \\ \quad = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-2\cdot 1\cdot h+h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \left(-2+h\right) = -2 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_-(-1) \ne f'_+(-1) \ \Rightarrow \ \nexists f'(-1) \ \Rightarrow \ f \text{ NÃO é diferenciável em } -1$$

Conclusão : f é diferenciável em todo $a \ne -1$

f NÃO é diferenciável em $-1 \in \text{Dom} f = \mathbb{R}$

f NÃO é uma função diferenciável



b) $f(x) = \begin{cases} x^2 \; se \; x \leq 1 \\ x^2 - 3 \; se \; x > 1 \end{cases}$

Solução:

♦ CONTINUIDADE :

- se $a < 1$, $f(x) = x^2$, para todo $x < 1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} x^2 = a^2 = f(a) \; , \; \forall a < 1 \; \Rightarrow \; f \text{ é contínua em todo } a < 1$$

- se $a > 1$, $f(x) = x^2 - 3$, para todo $x > 1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2 - 3) = a^2 - 3 = f(a) \; , \; \forall a > 1 \; \Rightarrow \; f \text{ é contínua em todo } a > 1$$

- se $a = 1$, $f(x) = x^2$, para todo $x \leq 1$ e $f(x) = x^2 - 3$, para todo $x > 1$.

$$\left. \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (x^2) = 1^2 = 1 \\ \displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x^2 - 3) = 1^2 - 3 = -2 \end{array} \right\rangle \Rightarrow \lim_{x \to 1^-} f(x) \neq \lim_{x \to 1^+} f(x) \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$\Rightarrow$ f NÃO é contínua em 1

Conclusão : f é contínua em todo $x \neq 1$

f NÃO é contínua em $1 \in \text{Dom} f = \mathbb{R}$

f NÃO é uma função contínua

♦ DIFERENCIABILIDADE :

- se $a < 1$, $f(x) = x^2$, para todo $x < 1$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - a^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a \ , \ \forall a < 1 \Rightarrow \text{f é diferenciável em todo } a < 1$$

- se $a > 1$, $f(x) = x^2 - 3$, para todo $x > 1$.

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left((a+h)^2 - 3\right) - \left(a^2 - 3\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(a^2 - 2ah - h^2 - 3\right) - \left(a^2 - 3\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2ah + h^2}{h} = \lim_{h\to 0} (2a + h) = 2a \ , \ \forall a > 1 \Rightarrow \text{f é diferenciável em todo } a > 1$$

- se $a = 1$, $f(x) = x^2$, para todo $x \le 1$ e $f(x) = x^2 - 3$, para todo $x > 1$.

$$\text{f NÃO é contínua em } 1 \Rightarrow \text{f NÃO é diferenciável em } 1$$

Podemos também concluir que f NÃO é diferenciável em 1 utilizando a definição de derivada :

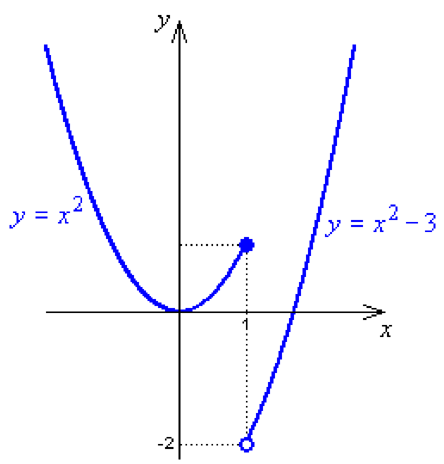
$$\left.\begin{aligned}
f'_-(1) &= \lim_{h\to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^-} \frac{(1^2 - 2\cdot 1\cdot h - h^2) - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{2\cdot 1\cdot h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0^-} (2 + h) = 2 \\
f'_+(1) &= \lim_{h\to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\left((1+h)^2 - 3\right) - 1^2}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{(1^2 + 2\cdot 1\cdot h + h^2 - 3) - 1^2}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0^+} \frac{2h + h^2 - 4}{h} = \lim_{h\to 0^+} \left(2 + h - \frac{4}{h}\right) = -\infty \Rightarrow \nexists f'_+(1)
\end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \nexists f'_+(1) \Rightarrow \nexists f'(1) \Rightarrow \text{f NÃO é diferenciável em } 1$$

Conclusão : f é diferenciável em todo $a \neq 1$

f NÃO é diferenciável em $1 \in \text{Dom} f = \mathbb{R}$

f NÃO é uma função diferenciável



c)$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2 \; se \; x < 1 \\ 2\sqrt{x} \; se \; x \geq 1 \end{cases}$

Solução:

♦ CONTINUIDADE :

- se $a < -1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x < -1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (2 - x^2) = 2 - a^2 = f(a) \; , \; \forall a < -1 \Rightarrow \text{f é contínua em todo } a < -1$$

- se $a > -1$, $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x^2) = a^2 = f(a) \; , \; \forall a > -1 \Rightarrow \text{f é contínua em todo } a > -1$$

- se $a = -1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x \leq -1$ e $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} (2 - x^2) = 2 - (-1)^2 = 1 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} (x^2) = (-1)^2 = 1 \end{array}\right\rangle \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 1 = f(-1) = 2 - 1^2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{f é contínua em } -1$$

Conclusão : f é contínua em todo $a \in$ IR=Dom f $\Rightarrow$ **f é uma função contínua**

♦ DIFERENCIABILIDADE :

- se $a < -1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x < -1$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2 - (a+h)^2\right) - \left(2 - a^2\right)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(2 - a^2 - 2ah - h^2\right) - \left(2 - a^2\right)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2ah - h^2}{h} = \lim_{h \to 0} \left(-2a - h\right) = -2a \; , \; \forall a < -1 \Rightarrow \text{f é diferenciável em todo } a < -1$$

- se $a > -1$, $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a^2 + 2ah + h^2) - a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2}{h} =$$

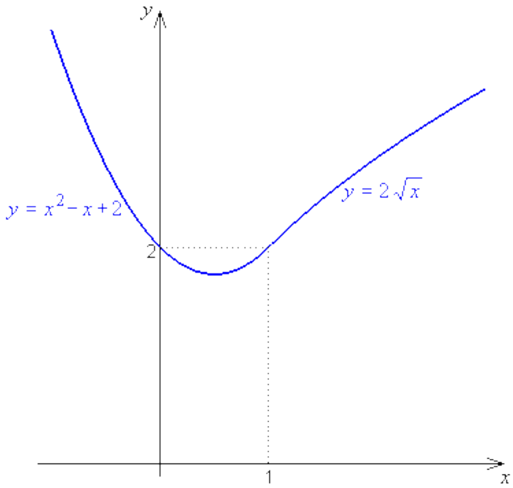
$$= \lim_{h \to 0} \left(2a + h\right) = 2a \; , \; \forall a < -1 \Rightarrow \text{f é diferenciável em todo } a > -1$$

- se $a = 1$, $f(x) = 2 - x^2$, para todo $x \leq -1$ e $f(x) = x^2$, para todo $x > -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-1) = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\left(2 - (-1+h)^2\right) - \left(2 - (-1)^2\right)}{h} = \\ = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{\left(2 - (-1)^2 - 2 \cdot -1 \cdot h - h^2\right) - \left(2 - (-1)^2\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{2 \cdot 1 \cdot h - h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \left(2 - h\right) = 2 \\ f'_+(-1) = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(-1+h)^2 - \left(2 - (-1)^2\right)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{(1^2 + 2 \cdot -1 \cdot h + h^2) - 1}{h} = \\ = \lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{-2 \cdot 1 \cdot h + h^2}{h} = \lim\limits_{h \to 0^+} \left(-2 + h\right) = -2 \end{array}\right\rangle \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'_-(-1) \neq f'_+(-1) \Rightarrow \nexists f'(-1) \Rightarrow \text{f NÃO é diferenciável em } -1$$

Conclusão : f é diferenciável em todo $a \neq -1$
f NÃO é diferenciável em $-1 \in$ Dom f =IR
f NÃO é uma função diferenciável



2) Considere a função f definida pela equação

$$f(x) = \begin{cases} 5 - 2x & se\ x < 3 \\ 4x - 13 & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

Solução:

Desde que $\lim_{x \to 3} f(x) = -1 = f(3)$, segue que f é contínua em 3. No entanto, se formarmos o quociente de diferença

$$\frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \frac{f(3 + \Delta x) + 1}{\Delta x}$$

e calcularmos seus limites quando Δx tende a zero, à direita e à esquerda, obteremos

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[4(3 + \Delta x) - 13] + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{4\Delta x}{\Delta x} = 4$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(3 + \Delta x) - f(3)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{[5 - 2(3 + \Delta x)] + 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-2\Delta x}{\Delta x} = -2$$

Desde que os limites à direita e à esquerda do quociente de diferença não são iguais, segue que o limite do quociente de diferença não existe; ou seja, a derivada f ’ (3) não existe, A não – existência da derivada de f em 3 pode ser antecipada do gráfico na figura 1, desde que esse gráfico não tem reta tangente em (3, – 1) . Geralmente, definimos a derivada à direita de uma função f por

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Similarmente, a derivada à esquerda de f é definida por

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\,.$$

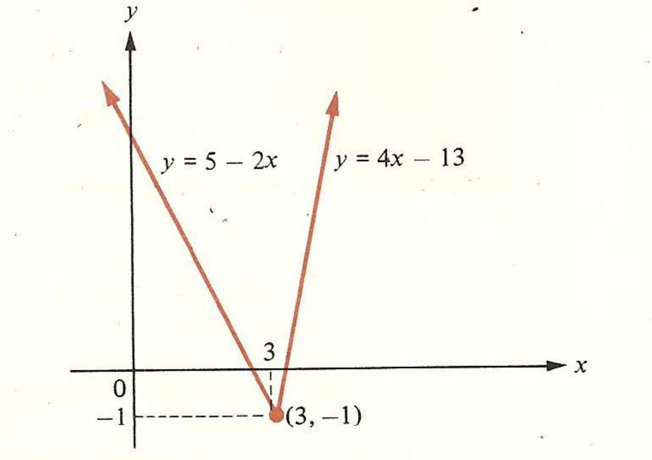


Figura 1

Assim, para a função na Figura 1, $f'_{+}(3) = 4$ e $f'_{-}(3) = -2$; então , $f'(3)$ não existe. De modo geral, a derivada $f'(x)$ existe e tem o valor A se e somente se ambas as derivadas $f'_{+}(x)$ e $f'_{-}(x)$ existem e possuem o valor comum A.

3) Seja a função f definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & se\ x < 1 \\ 2x - 1 & se\ x \geq 1 \end{cases}$

Calcule as derivadas $f'_{+}(1)$ e $f'_{-}(1)$ e determine $f'(1)$, se existir.

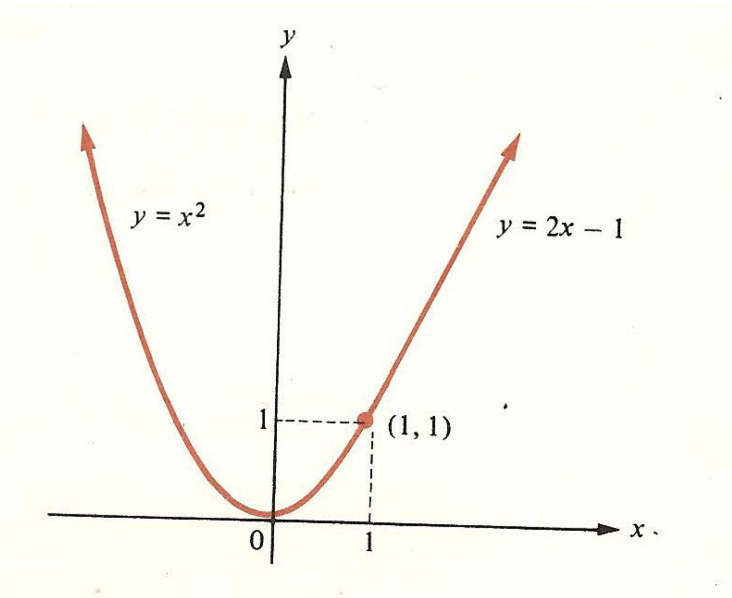


Figura 2

Solução:

Aqui,

$$f'_{+}(1) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{[2(1 + \Delta x) - 1] - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{2\Delta x}{\Delta x} = 2$$

Também,

$$f'_{-}(1) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(1 + \Delta x) - f(1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{(1 + \Delta x)^2 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} (2 + \Delta x) = 2$$

Desde que $f'_{+}(1) = f'_{-}(1) = 2$, concluímos que $f'(1)$ existe e é igual a 2. Esse exemplo mostra que uma função definida em intervalos pode ter uma derivada na vizinhança do número entre os intervalos.

1.2.2- Continuidade de uma Função Diferenciável

Teorema 1: Se uma função f é diferenciável em um número x, então ela é contínua em x.

Prova:

Considere que f é diferenciável em x. Mostraremos que f é contínua em x demonstrando que $\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = f(x)$. Desde que o limite de um produto é o produto dos limites, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \Delta x\right]$$

$$= \left[\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] \left[\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x\right] = f'(x). 0 = 0$$

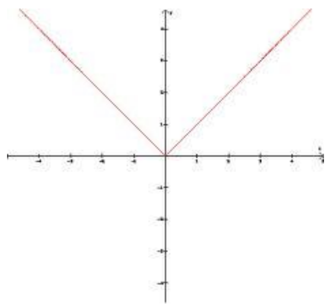
Todavia, desde que o limite de uma soma é a soma dos limites, temos

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x) + f(x)]$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} [f(x + \Delta x) - f(x)] + \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = 0 + f(x) = f(x)$$

Embora, como mostra o Teorema 1, uma função diferenciável seja automaticamente contínua, existem funções contínuas que não sejam diferenciáveis. O exemplo mais simples é a função definida por f(x) = |x|. Podemos observar que f é contínua para o número 0, mas não é diferenciável em 0 desde que $f'_{+}(0) = 1$ e $f'_{-}(0) = -1$. Assim, essa função é evidentemente contínua em todo seu domínio, em particular, em x = 0; entretanto, não é derivável na origem.

Temos $f(x) = |x| = \begin{cases} x \ \ se\ x \geq 0 \\ -x \ \ se\ x < 0 \end{cases}$ cujo gráfico é



Observamos que $f'(x) = \begin{cases} 1 & se\ x > 0 \\ -1 & se\ x < 0 \end{cases}$ e que não existe f '(0) . Por outro lado, f é contínua para todo x>0 ou x<0. Além disso, como 0 pertence ao domínio da função e $\lim_{x \to 0} |x| = 0 = f(0)$, temos que f é contínua também em x=0.

Exemplos:

1) Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x \leq 0 \\ 1 & se\ 0 < x < e \\ \ln x & se\ x \geq e \end{cases}$$

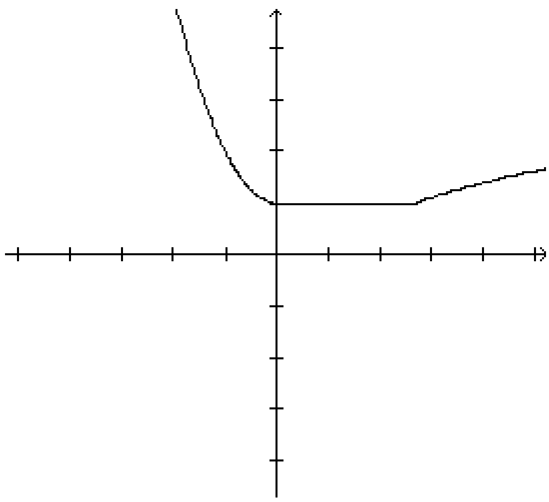
Mostre que f é **contínua** em todo ponto de seu domínio. Decida em qual subconjunto de seu domínio, f é **derivável**. Dê a expressão e o gráfico de f'.

Solução:

Temos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & se\ x \leq 0 \\ 1 & se\ 0 < x < e \\ \ln x & se\ x \geq e \end{cases}$$

cujo gráfico é o seguinte:



Em primeiro lugar, observemos que Dom f=R.

Em segundo lugar, a função é claramente **contínua** em cada um dos três intervalos abertos onde foi definida por uma diferente expressão. De fato,

- para x<0, $f(x) = x^2 + 1$ é uma função contínua
- para 0<x<e, f(x)=1 é contínua
- para x>e, f(x)=ln x é contínua

Falta verificar o que acontece nos pontos x=0 e x=e.

- x=0

Temos f(0)=1 e $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ pois $\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} (x^2 + 1) = 1$ e $\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} (1) = 1$.

Logo $\lim_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$ e, portanto, f é contínua em x=0.

- x=e

Temos:

f(e)=ln e=1

e

$\lim_{x \to e} f(x) = 1$ pois

$\lim_{x \to e_-} f(x) = \lim_{x \to e_-} (1) = 1$ e $\lim_{x \to e_+} f(x) = \lim_{x \to e_+} (\ln x) = 1$.

Logo $\lim_{x \to e} f(x) = 1 = f(e)$ e, portanto, f é contínua em x=e.

Assim, a função f é contínua em todos os pontos de seu domínio.

Finalmente, a função é **derivável** em cada um dos três intervalos abertos onde foi definida por uma diferente expressão. De fato,

- para x<0, $f(x) = x^2 + 1$ é uma função derivável com f'(x)=2x
- para 0<x<e, f(x)=1 é derivável com f'(x)=0
- para x>e, f(x)=ln x é derivável com $f'(x) = \frac{1}{x}$

Precisamos verificar separadamente o que acontece em x=0 e em x=e, ou seja, nos pontos de "emenda". Em cada caso, precisamos investigar a existência ou não de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$

- x=0

Calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{(\Delta x)^2 + 1 - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \Delta x = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

Assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = 0$ ou seja, existe a derivada da função em x=0 e f'(0)=0

- x=e

Calculando os limites laterais, temos:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(e+\Delta x) - f(e)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{1 - \ln e}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{1-1}{\Delta x} = 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(e+\Delta x) - f(e)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\ln(e+\Delta x) - \ln e}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\ln\left(\frac{e+\Delta x}{e}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{1}{\Delta x} . \ln\left(\frac{e+\Delta x}{e}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{e}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \left[\ln\left(1 + \frac{\Delta x}{e}\right)^{\frac{e}{\Delta x}}\right]^{\frac{1}{e}} = \frac{1}{e} \cdot \ln e = \frac{1}{e}$$

Propriedades dos logaritmos

$$\lim_{u \to 0} (1+u)^{\frac{1}{u}} = e$$

Dessa maneira, concluímos que não existe o limite $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ para x=e, pois $\lim\limits_{\Delta x \to 0_-} \frac{\Delta f}{\Delta x} \neq \lim\limits_{\Delta x \to 0_+} \frac{\Delta f}{\Delta x}$.

Ou seja, f não é derivável em x=e.

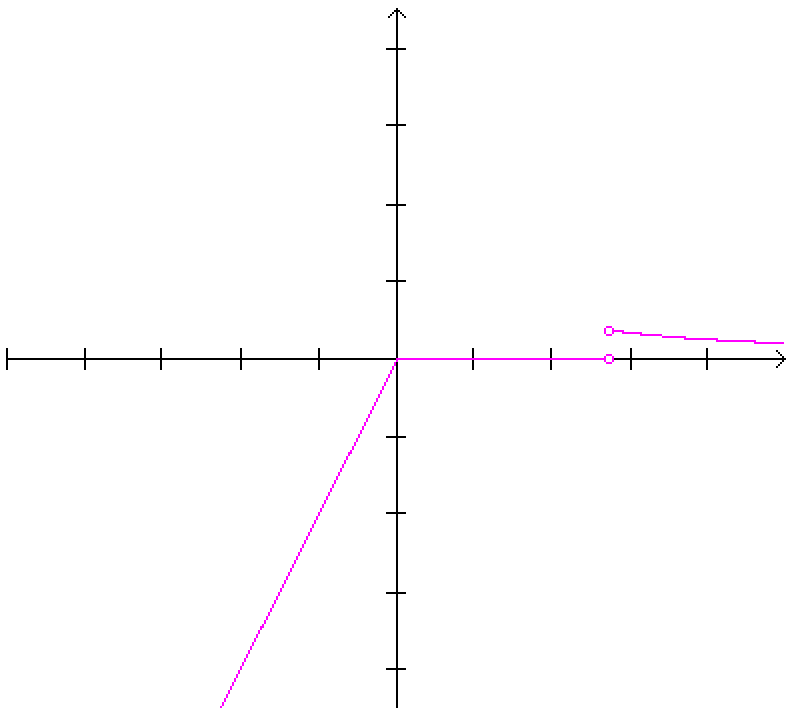
A expressão da derivada de f é então:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < e \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > e \end{cases}$$

ou seja

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x \leq 0 \\ 0 & \text{se } 0 < x < e \\ \frac{1}{x} & \text{se } x > e \end{cases}$$

O gráfico da derivada da função fica assim:



2) Invente uma função definida por partes - três ou quatro - como no **Exercício 1**, que seja contínua no domínio.

a) Construa seu gráfico.
b) Garanta a continuidade de sua função.
c) Decida em qual subconjunto do domínio, sua função é derivável.
d) Dê a expressão e o gráfico da derivada.

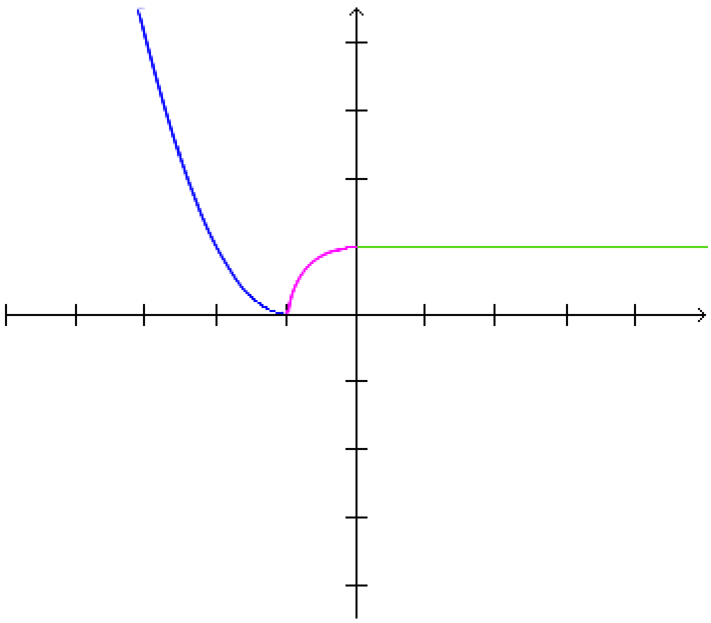
Solução:

Há uma infinidade de exemplos que podem ser criados. Uma possibilidade é a seguinte:

$$g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{se } x < -1 \\ x^3 + 1 & \text{se } -1 \leq x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

a)

O gráfico de **g** é o seguinte:



O domínio da função é R. Graficamente podemos "desconfiar" do que está acontecendo, para depois formalizar nossas observações.

b) A função é claramente contínua em cada um dos intervalos em que foi definida por uma diferente expressão. O problema acontece com os pontos de "emenda":

- x=-1

Temos: g(-1)=0

sendo que

$$\lim_{x \to -1_-} g(x) = \lim_{x \to -1_-} (x+1)^2 = 0$$

e

$$\lim_{x \to -1_+} g(x) = \lim_{x \to -1_+} (x^3+1) = 0$$

o que garante que $\lim_{x \to -1} g(x) = 0 = g(-1)$, ou seja, g é contínua em x=-1.

- x=0

Temos: g(0)=1

sendo que

$$\lim_{x \to 0_-} g(x) = \lim_{x \to 0_-} (x^3+1) = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0_+} g(x) = \lim_{x \to 0_+} (1) = 1$$

o que garante que $\lim_{x \to 0} g(x) = 1 = g(0)$, ou seja, g é contínua em x=0. Desse modo, g é contínua em todo o seu domínio

c) Com relação à derivabilidade de g, já devemos ter uma certa "desconfiança" simplesmente pelo exame do gráfico.

Em primeiro lugar, a função é claramente derivável em cada um dos intervalos em que foi definida por uma diferente expressão.

Assim,

para x<-1: g'(x)=2.(x+1)

para -1<x<0: g'(x)=$3x^2$

para x>0: g'(x)=0

O problema acontece com os pontos de "emenda":

- x=-1

Precisamos investigar a existência de $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(-1+\Delta x)-g(-1)}{\Delta x}$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{g(-1+\Delta x)-g(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{(-1+\Delta x+1)^2-((-1)^3+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\Delta x^2}{\Delta x} = 0$$

enquanto que

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{g(-1+\Delta x)-g(-1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{(-1+\Delta x)^3+1-((-1)^3+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{(\Delta x-1)^3+1}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\Delta x^3-3\Delta x^2+3\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \left(\Delta x^2-3\Delta x+3\right) = 3$$

Como os limites laterais são diferentes, não existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(-1+\Delta x)-g(-1)}{\Delta x}$. Logo, g não é derivável em x=-1.

- x=0

Precisamos investigar a existência de $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x}$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\Delta x^3+1-(0^3+1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \Delta x^2 = 0$$

enquanto que

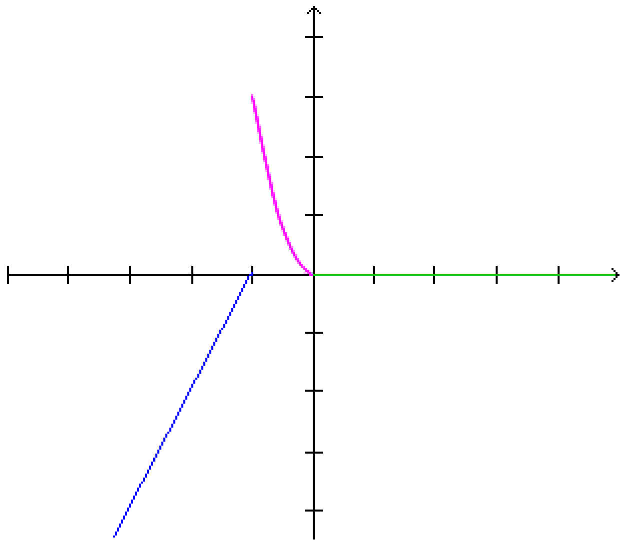
$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{1-(0^3+1)}{\Delta x} = 0$$

Como os limites laterais são iguais, existe $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{g(0+\Delta x)-g(0)}{\Delta x} = 0$. Logo, g é derivável em x=0 e g'(0)=0

d) A derivada de g é então:

$$g'(x) = \begin{cases} 2(x+1) & \text{se } x < -1 \\ 3x^2 & \text{se } -1 < x < 0 \\ 0 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

O gráfico de g' é o seguinte:



3) Invente uma outra função definida por partes - três ou quatro - como no **Exercício 1**, que seja derivável no domínio.

a) Construa seu gráfico.
b) Garanta a continuidade de sua função.
c) Garanta a derivabilidade de sua função.
d) Dê a expressão e o gráfico da derivada.

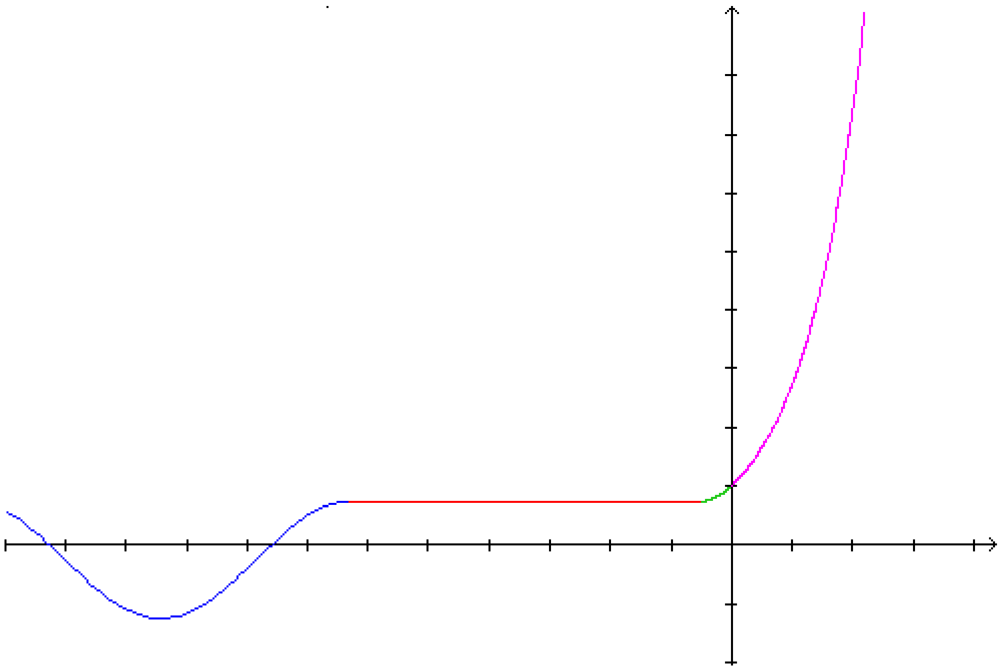
Solução:

Há uma infinidade de exemplos que podem ser criados. Uma possibilidade é a seguinte:

$$f(x) = \begin{cases} \cos x - \dfrac{1}{4} & \text{se } x < -2\pi \\ \dfrac{3}{4} & \text{se } -2\pi \leq x \leq -\dfrac{1}{2} \\ x^2 + x + 1 & \text{se } -\dfrac{1}{2} < x < 0 \\ e^x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \cos x-\dfrac{1}{4} & \text{se } x<-2\pi \\ \dfrac{3}{4} & \text{se } -2\pi\le x\le -\dfrac{1}{2} \\ x^2+x+1 & \text{se } -\dfrac{1}{2}<x<0 \\ e^x & \text{se } x\ge 0 \end{cases}$$

a)O gráfico da função proposta é o seguinte:



Observamos que o domínio de f é o conjunto R.

b) Se a função é derivável em seu domínio então ela é contínua. Assim, se já soubermos que a derivada existe em todos os pontos, concluímos que a função é contínua em todo o seu domínio. Entretanto, para mostrar diretamente que se trata de uma função contínua, observamos inicialmente que ela é contínua em cada um dos intervalos em que foi definida por uma diferente expressão. Além disso, precisamos examinar a questão nos pontos de "emenda":

- $x=-2\pi$

Temos que $f(-2\pi)=\dfrac{3}{4}$

e que

$$\lim_{x \to -2\pi_-} f(x) = \lim_{x \to -2\pi_-} (\cos x - \frac{1}{4}) = \frac{3}{4}$$

e

$$\lim_{x \to -2\pi_+} f(x) = \lim_{x \to -2\pi_+} (\frac{3}{4}) = \frac{3}{4}$$

logo $\lim_{x \to -2\pi} f(x) = \frac{3}{4} = f(-2\pi)$

ou seja, f é contínua em $x = -2\pi$.

- $x = -\frac{1}{2}$

Temos que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$:

e que

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}-} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}-} \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

e

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}+} f(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}+} (x^2 + x + 1) = \frac{3}{4}$$

logo $\lim_{x \to -\frac{1}{2}} f(x) = \frac{3}{4} = f\left(-\frac{1}{2}\right)$

ou seja, f é contínua em $x = -\frac{1}{2}$.

- x=0

Temos que f(0)=1:

e que

$$\lim_{x \to 0_-} f(x) = \lim_{x \to 0_-} (x^2 + x + 1) = 1$$

e

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} e^x = 1$$

logo $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1 = f(0)$

ou seja, f é contínua em x=0.

Assim, f é contínua em todo o seu domínio

c) Com relação à derivabilidade de f, já devemos ter uma certa "desconfiança" simplesmente pelo exame do gráfico. Em primeiro lugar, a função é claramente derivável em cada um dos intervalos em que foi definida por uma diferente expressão.

Assim,

para $x < -2\pi$: $f'(x) = -\text{sen}\, x$

para $-2\pi < x < -\dfrac{1}{2}$: $f'(x) = 0$

para $-\dfrac{1}{2} < x < 0$: $f'(x) = 2x + 1$

para: $x > 0$: $f'(x) = e^x$

O problema é com os pontos de "emenda":

- $x = -2\pi$

Precisamos investigar a existência de $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(-2\pi + \Delta x) - f(-2\pi)}{\Delta x}$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(-2\pi + \Delta x) - f(-2\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\cos(-2\pi + \Delta x) - \frac{1}{4} - \frac{3}{4}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\cos(-2\pi)\cos(\Delta x) + \text{sen}(-2\pi)\text{sen}(\Delta x) - 1}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} = 0$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \cos(-2\pi) = 1 \\ \text{sen}(-2\pi) = 0 \end{array}}$$

$$\boxed{\lim_{u \to 0} \frac{\cos u - 1}{u} = 0}$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(-2\pi + \Delta x) - f(-2\pi)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\Delta x} = 0$$

Como os limites laterais são iguais, existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(-2\pi + \Delta x) - f(-2\pi)}{\Delta x} = 0$. Logo, f é derivável em $x = -2\pi$ e $f'(-2\pi) = 0$.

- $x = -\frac{1}{2}$

Precisamos investigar a existência de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x}$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{4}}{\Delta x} = 0$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) + 1 - \frac{3}{4}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{\frac{1}{4} - \Delta x + (\Delta x)^2 - \frac{1}{2} + \Delta x + \frac{1}{4}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta x} = 0$$

Como os limites laterais são iguais, existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(-\frac{1}{2} + \Delta x\right) - f\left(-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} = 0$. Logo, f é derivável em $x = -\frac{1}{2}$ e $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$.

- x=0

Precisamos investigar a existência de $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x}$. Para tanto, vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{(\Delta x)^2 + \Delta x + 1 - e^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_-} (\Delta x + 1) = 1$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{e^{\Delta x} - e^0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = 1$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$

Como os limites laterais são iguais, existe $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x} = 1$. Logo, f é derivável em x=0 e f'(0)=1.

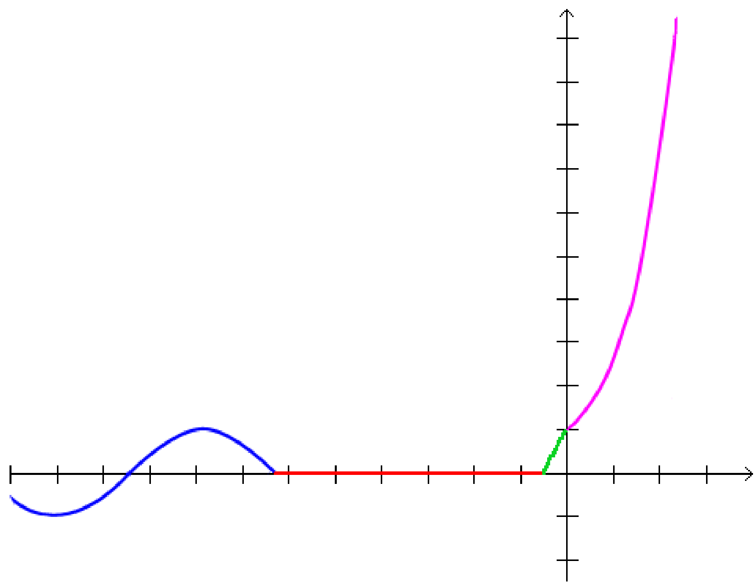
d) A derivada de f é então:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } x < -2\pi \\ 0 & \text{se } x = -2\pi \\ 0 & \text{se } -2\pi < x < -\frac{1}{2} \\ 0 & \text{se } x = -\frac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{se } -\frac{1}{2} < x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

que pode ser escrita da seguinte maneira:

$$f'(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x & \text{se } x < -2\pi \\ 0 & \text{se } -2\pi \le x \le -\frac{1}{2} \\ 2x+1 & \text{se } -\frac{1}{2} < x \le 0 \\ e^x & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

O gráfico de f' é o seguinte:



4) Descubra condições sobre os parâmetros **a**, **b**, **c**, **m** e **n** para que

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{se } x\le 1 \\ mx+n & \text{se } x>1 \end{cases}$$

a) seja contínua em x=1;
b) seja derivável em x=1.
c) Dê um exemplo numérico de uma função derivável desse tipo.

Solução:

Temos:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{se } x\le 1 \\ mx+n & \text{se } x>1 \end{cases}$$

a) Pela maneira como foi definida a função, f(1)=a+b+c e, para que **f** seja contínua em x=1, é necessário que a+b+c=m+n. Essa condição garante que

$\lim\limits_{x\to 1_+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1_-} f(x)=f(1)$, isto é, **f** é contínua em x=1.

b) Para que **f** seja derivável em x=1, é preciso, em primeiro lugar, que a função seja contínua nesse ponto, isto é, a+b+c=m+n.

Para que exista reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,a+b+c)=(1,m+n), é preciso que as derivadas laterais para x=1 coincidam. Isso significa que 2a+b=m.

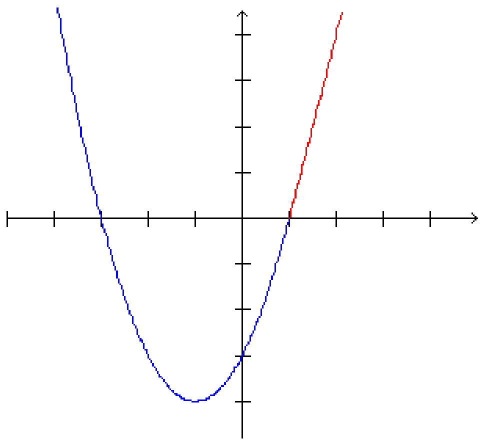
Dessa forma, **f** será derivável em x=1 quando os parâmetros a, b, c, m, n satisfizerem as condições:

$$\begin{cases} a+b+c=m+n \\ 2a+b=m \end{cases}$$

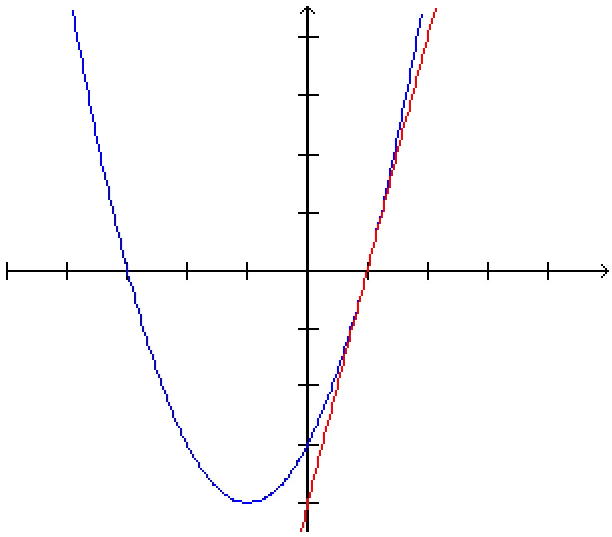
c) Para construir um exemplo de uma função desse tipo, basta escolher os parâmetros de modo que as condições acima estejam satisfeitas. Evidentemente, há uma infinidade de escolhas possíveis. Por exemplo,

a=1, b=2, c=–3;

m=4 e n=–4.



Evidentemente, **a reta vermelha** é **tangente à parábola azul** no ponto de abscissa x=1.



1.3- História do Cálculo

O surgimento do cálculo diferencial e integral foi palco de uma grande controvérsia sobre a paternidade da descoberta. A discussão envolveu dois grandes gênios: Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried Leibniz (1642 -1716).

Atualmente considera-se que os dois matemáticos descobriram o cálculo de forma independente e, assim, o crédito é dado a ambos. No entanto, à época o debate de quem merecia o reconhecimento foi acalorado, com defensores aguerridos de ambos os lados.

É importante observar também que uma descoberta matemática importante não aparece do nada. É o resultado do trabalho de muitas pessoas ao longo de séculos. Newton reconheceu este fato por meio de sua famosa frase "Se vi mais longe foi por estar de pé sobre ombros de gigantes”.

Newton e Leibniz tiveram abordagens diferentes do Cálculo e tomaram caminhos distintos em suas descobertas. Newton tentava resolver problemas na Física e seguiu um caminho mais prático voltado à solução destes problemas. Leibiniz era um filósofo e tomou um caminho mais abstrato.

Foi Leibniz que criou a notação $\frac{dy}{dx}$ para a derivada de y em relação a x. Ele imaginava um "triângulo infinitesimal" formado pelo incremento Δx e o incremento correspondente Δy . A razão $\frac{dy}{dx}$ se aproxima do coeficiente angular da tangente quando $\Delta x \to 0$. Leibiniz via esse limite como a divisão de duas quantidades "infinitesimais".

Newton descobriu os fundamentos do Cálculo Diferencial e Integral muitos anos antes de Leibniz, mas publicou seus trabalhos mais tarde. Newton chamou o cálculo de "métodos de fluxões". Usando diferenciação, Newton produziu métodos que resolviam problemas do cálculo da área, tangentes, comprimento de curvas e máximos e mínimos de funções.

Newton também percebeu o fato crucial de que a integração de uma função é a operação inversa da diferenciação, o que hoje é chamado Teorema Fundamental do Cálculo.

Para realizar um estudo completo sobre a origem, desenvolvimento e consequências do Cálculo seria necessária uma pesquisa muito extensa, no entanto, a nossa intenção é fornecer uma apresentação geral que contenha alguns fatos importantes que permeiam os acontecimentos históricos relacionados com a construção desta importante ferramenta da Matemática: o Cálculo. Além disso, é relevante deixar claro que essa construção é o resultado de diversas contribuições de muitos estudiosos, como ocorre, de maneira geral, com o conhecimento humano.

As contribuições dos matemáticos para o nascimento do Cálculo são inúmeras. Muitos deles, mesmo que de forma imprecisa ou não rigorosa, já utilizavam conceitos do Cálculo para resolver vários problemas - por exemplo, Cavalieri, Barrow, Fermat e Kepler. Nesse tempo ainda não havia uma sistematização, no sentido de uma construção logicamente estruturada.

A união das partes conhecidas e utilizadas até então, aliada ao desenvolvimento e aperfeiçoamento das técnicas, aconteceu com Newton e Leibniz, como já foi dito anteriormente, que deram origem aos fundamentos mais importantes do Cálculo: as Derivadas e as Integrais.

O Cálculo pode ser dividido em duas partes: uma relacionada às derivadas, ou Cálculo Diferencial, e outra parte relacionada às integrais, ou Cálculo Integral.

O Cálculo Integral: alguns fatos históricos

Os primeiros problemas que apareceram na História relacionados com as integrais são os problemas de quadratura. Um dos problemas mais antigos enfrentados pelos gregos foi o da medição de superfícies a fim de encontrar suas áreas. Quando os antigos geômetras começaram a estudar as áreas de figuras planas, eles as relacionavam com a área do quadrado, por ser essa a figura plana mais simples. Assim, buscavam encontrar um quadrado que tivesse área igual à da figura em questão. A palavra quadratura é um termo antigo que se tornou sinônimo do processo de determinar áreas.

As quadraturas que fascinavam os geômetras eram as de figuras curvilíneas, como o círculo, ou figuras limitadas por arcos de outras curvas. As lúnulas - regiões que se assemelham com a lua no seu quarto-crescente - foram estudadas por Hipócrates de Chios, 440 a.C., que realizou as primeiras quadraturas da História. Antifon, por volta de 430 a.C., procurou encontrar a quadratura do círculo através de uma sequência infinita de polígonos regulares inscritos: primeiro um quadrado, depois um octógono, em seguida um hexadecágono, e assim por diante. Havia, entretanto, um problema: essa sequência nunca poderia ser concluída. Apesar disso, essa foi uma ideia genial que deu origem ao método da exaustão.

Nesse contexto, uma das questões mais importantes, e que se constituiu numa das maiores contribuições gregas para o Cálculo, surgiu por volta do ano 225 a.C. Trata-se de um teorema de Arquimedes para a quadratura da parábola. Arquimedes descobriu que a área da região limitada por uma parábola cortada por uma corda qualquer, é igual a 4/3 da área do triângulo que tem a mesma altura e que tem a corda como base.

Arquimedes gerou também uma soma com infinitos termos, mas ele conseguiu provar rigorosamente o seu resultado, evitando, com o método da exaustão, a dificuldade com a quantidade infinita de parcelas. Esse é o primeiro exemplo conhecido de soma infinita que foi resolvido. Outra contribuição de Arquimedes foi a utilização do método da exaustão para encontrar a área do círculo, obtendo uma das primeiras aproximações para o número π.

Outras "integrações" foram realizadas por Arquimedes a fim de encontrar o volume da esfera e a área da superfície esférica, o volume do cone e a área da superfície cônica, a área da região limitada por uma elipse, o volume de um paraboloide de revolução e o volume de um hiperboloide de revolução. Em seus cálculos, Arquimedes encontrava somas com um número infinito de parcelas. O argumento utilizado era a dupla *reductio ad absurdum* para "escapar" da situação incômoda. Basicamente, se não podia ser nem maior, nem menor, tinha que ser igual.

A contribuição seguinte para o Cálculo Integral apareceu somente ao final do século XVI quando a Mecânica levou vários matemáticos a examinar problemas relacionados com o centro de gravidade. Em 1606, em Roma, Luca Valerio publicou *De quadratura parabolae* onde utilizou o mesmo método grego para resolver problemas de cálculo de áreas desse tipo.

Kepler, em seu trabalho sobre o movimento dos planetas, teve que encontrar as áreas de vários setores de uma região elíptica. O método de Kepler consistia em pensar na superfície como a soma de linhas - método este que, na prática, apresentava muita imprecisão. Analogamente, para calcular volumes de sólidos, pensava na soma de fatias planas. Assim, calculou os volumes de muitos sólidos formados pela revolução de uma região bidimensional ao redor de um eixo. Para o cálculo de cada um desses volumes, Kepler subdividia o sólido em várias fatias, chamadas infinitésimos, e a soma desses infinitésimos se aproximava do volume desejado.

Os próximos matemáticos que tiveram grande contribuição para o nascimento do Cálculo Integral foram Fermat e Cavalieri. Em sua obra mais conhecida, *Geometria indivisibilibus continuorum nova*, Cavalieri desenvolveu a ideia de Kepler sobre quantidades infinitamente pequenas. Aparentemente, Cavalieri pensou na área como uma soma infinita de componentes ou segmentos "indivisíveis". Ele mostrou, usando os seus métodos, o que hoje em dia escrevemos: $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$.

Todo o processo geométrico desenvolvido por Cavalieri foi então aritmetizado por Wallis. Em 1655, em seu trabalho *Arithmetica infinitorum*, Wallis desenvolveu princípios de indução e interpolação que o levaram a encontrar diversos resultados importantes, entre eles, a antecipação de parte do trabalho de Euler dobre a função gamma.

Fermat desenvolveu uma técnica para achar a área sob cada uma das, então chamadas, "parábolas maiores": curvas do tipo $y = kx^n$, onde $k > 0$ é constante e n=2,3,4, etc. Empregou então uma série geométrica para fazer o mesmo para cada uma das curvas do tipo $y = kx^n$, onde $k > 0$ e n=-2,-3,-4,etc. Por volta de 1640, a fórmula geral da integral das parábolas maiores era conhecida por Fermat, Blaise Pascal, Descartes, Torricelli e outros.

O problema do movimento estava sendo estudado desde a época de Galileu. Tanto Torricelli como Barrow consideraram o problema do movimento com velocidades variadas. A derivada da distância era a velocidade e a operação inversa, partindo da velocidade, levava à distância. A partir desse problema envolvendo movimento, a ideia de operação inversa da derivada desenvolveu-se naturalmente e a ideia de que a integral e a derivada eram processos inversos era familiar a Barrow. Embora Barrow nunca tenha enunciado formalmente o Teorema Fundamental do Cálculo, estava trabalhando em direção a esse resultado; foi Newton, entretanto, quem, continuando na mesma direção, formulou o teorema.

Newton continuou os trabalhos de Barrow e Galileu sobre o estudo do movimento dos corpos e desenvolveu o Cálculo aproximadamente dez anos antes de Leibniz. Ele desenvolveu os métodos das *fluxions* - derivação - e *fluents* - integração - e utilizou-os na construção da mecânica clássica. Para Newton, a integração consistia em achar *fluents* para um dado *fluxion* considerando, dessa maneira, a integração como inversa da derivação. Com efeito, Newton sabia que a derivada da velocidade, por exemplo, era a aceleração e a integral da aceleração era a velocidade.

Newton representava as integrais por um acento grave acima da letra em questão, por exemplo, a integral de **y** era representada por **`y**. Leibniz, diferentemente de Newton, usava a integração como uma soma, de uma maneira bastante parecida à de Cavalieri. Daí vem o símbolo $\int$ - um 's' longo - para representar *summa*. Segundo ele, "represento a área de uma figura pela soma das áreas de todos os retângulos infinitesimais definidos pelas ordenadas e pelas diferenças entre as abscissas... e, portanto, eu represento em meu cálculo a área da figura por $\int y\,dx$".

Ambos desenvolveram o Cálculo Integral separadamente, entretanto Newton via o Cálculo como geométrico, enquanto Leibniz o via mais como analítico.

Leibiniz acreditava que a notação era de fundamental importância e, de fato, a sua notação foi mais eficaz do que a de Newton e acabou por se consolidar, sendo utilizada até hoje, mantendo exatamente a mesma forma. Newton escrevia para si próprio e não foi feliz em encontrar uma notação consistente.

Os trabalhos de Leibniz sobre o Cálculo Integral foram publicados em 1684 e em 1686 sob o nome *Calculus Summatorius* . O nome Cálculo Integral foi criado por Johann Bernoulli e publicado pela primeira vez por seu irmão mais velho Jacques Bernoulli em 1690.

Principalmente como consequência do Teorema Fundamental do Cálculo de Newton, as integrais foram simplesmente vistas como derivadas "reversas". Na mesma época da publicação das tabelas de integrais de Newton, Johann Bernoulli descobriu processos sistemáticos para integrar todas as funções racionais, que é chamado método das frações parciais. Essas ideias foram resumidas por Leonard Euler, na sua obra sobre integrais.

Após o estabelecimento do Cálculo, Euler daria continuidade ao estudo de funções - ainda prematuro na época - juntamente com Cauchy, Gauss e Riemann. Foi Euler, entretanto, quem reuniu todo o conhecimento até então desenvolvido e criou os fundamentos da Análise.

Atualmente o Cálculo Integral é amplamente utilizado em várias áreas do conhecimento humano e aplicado para a solução de problemas não só de Matemática, mas de Física, Astronomia, Economia, Engenharia, Medicina, Química, por exemplo.

Unidade 2- Regras de Diferenciação

O processo de cálculo da derivada de uma função a partir da definição apresentada anteriormente, em geral é lento, por isso, enunciaremos e provaremos alguns teoremas que nos possibilitam encontrar derivadas com mais facilidade. Será apresentada a prova de cada teorema e será enunciada a fórmula de derivação correspondente, bem como alguns exemplos.

2.1- Derivadas de Funções Polinomiais

2.1.1- Regra da Constante

Se c for uma constante e se $f\ (x)$ = c para todo x, então $f'(x)$ = 0.

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{c - c}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

A derivada de uma função constante é a função nula, ou seja, a derivada de uma constante é zero. Simbolicamente, se c é uma constante, então

$$\boldsymbol{D_x(c) = 0} \ \textbf{ ou } \ \boldsymbol{\frac{d}{dx}\ (c) = 0}$$

Exemplo: $f\ (x)$ = 4, então $f'\ (x)$ = 0.

2.1.2- Regra da Potência

Se n for um inteiro positivo e se : $f\ (x) = \ x^n$, então $f'\ (x) = \ nx^{n-1}$.

Prova

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

Aplicando o teorema binomial a $(x + \Delta x)^n$, temos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right] - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}(\Delta x)^2 + \cdots + nx(\Delta x)^{n-1} + (\Delta x)^n\right]}{\Delta x}$$

Dividindo o numerador e o denominador por Δx, obtemos

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\left[nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}\Delta x + \cdots + nx(\Delta x)^{n-2} + (\Delta x)^{n-1}\right]$$

Todos os termos, exceto o primeiro, tem Δx como fator; assim sendo todos os termos, exceto o primeiro, tendem a zero quando Δx tende a zero. Assim $f'(x) = nx^{n-1}$.

A derivada de uma potência inteira positiva de x é o expoente de x vezes x elevado à potência inferior seguinte. Simbolicamente, se n é um inteiro positivo fixado, então

$$D_x(x^n) = nx^{n-1} \text{ ou } \frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

Exemplos:

a) $f(x) = x^8$, então $f'(x) = 8x^7$.
b) $f(x) = x$

i) Se x ≠ 0, pela Regra da Potência $f'(x) = 1.x^0 = 1.1 = 1$

ii) Da definição temos:

$$f'(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{x-0}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Portanto, para todo x, $\boldsymbol{D_x(x) = 1}$.

2.1.3- Regra da Homogeneidade

Se f é derivável e **k** é uma constante, então **k.f** é derivável e $(k.f)' = kf'$.

Prova:

Calculemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(k.f)(x+\Delta x) - (k.f)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.f(x+\Delta x) - k.f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{k.\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} k \cdot \left(\frac{\left(f(x+\Delta x) - f(x)\right)}{\Delta x} \right)$$

Como o limite da fração existe, pois é a derivada da função f, que é derivável por hipótese, então a função k.f é derivável e $(k.f)'(x) = kf'(x)$, como queríamos provar.

A derivada de uma constante vezes uma função é a constante vezes a derivada da função. Simbolicamente, se c é uma constante e u é uma função diferenciável de x, então

$$D_x(c.u) = c.D_x(u). \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dx}(c.u) = c.\frac{du}{dx}.$$

Exemplos:

a) Calcule a derivada da função $f(x) = 5x^4$.

Solução

$f'(x) = D_x(5x^4) = 5.D_x(x^4) = 5.(4x^3) = 20x^3$

b) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = \frac{2}{3}x^7$.

Solução

$f'(x) = D_x(\frac{2}{3}x^7) = \frac{2}{3}.D_x(x^7) = \frac{2}{3}.\left(7x^6\right) = \frac{14}{3}x^6$

2.1.4- Regra da Soma

Se f e g são deriváveis, então f + g é derivável e (f + g)' = f' + g'.

Prova

Calculemos o $lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f+g)(x+\Delta x)-(f+g)(x)}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)+g(x+\Delta x)-(f(x)+g(x))}{\Delta x} = lim_{\Delta x \to 0} [\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}]$

Uma vez que cada uma das funções é derivável, ambas as frações têm limite: a primeira f'(x) e a segunda g'(x). Logo o limite existe, ou seja, a derivada da **função soma** existe e é igual à soma das derivadas, isto é: $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ como queríamos provar.

Logo, a derivada da soma de duas funções é a soma de suas derivadas se elas existirem. Esse resultado pode ser aplicado a um número qualquer finito de funções. Assim, a derivada da soma de um número finito de funções é igual à soma de suas derivadas, se elas existirem.

Exemplos:

a) Encontre a derivada da função $f\,(x) = 3x^5 + 11x^8$.

Solução:

Temos

$f\,'(x) = D_x(3x^5 + 11x^8)$

$= D_x(3x^5) + D_x(11x^8)$ Regra da soma

$= 3D_x(x^5) + 11D_x(x^8)$ Regra da homogeneidade

$= 3.(5x^4) + 11(8x^7)$ Regra da potência

$= \ 15x^4 + \ 88x^7$

b) Encontre $f\,'(x)$ se $f\,(x) = 7x^4 - 2x^3 + 8x + 5$.

Solução:

$f\,'(x) = D_x(7x^4 - \ 2x^3 + 8x + 5)$

$= D_x(7x^4) - D_x(\ 2x^3) + D_x(8x) + D_x(5)$

$= 28x^3 - \ 6x^2 + 8$

2.1.5- Regra do Produto

Se **f** e **g** são deriváveis, então **f.g** é derivável e $(f.g)' = f'.g + f.g'$.

Prova

Calculemos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(f.g)(x + \Delta x) - (f.g)(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - (f(x).g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x).g(x + \Delta x) - f(x + \Delta x).g(x) + f(x + \Delta x).g(x) - (f(x).g(x))}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x + \Delta x) \cdot \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} + g(x) \cdot \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right]$$

onde subtraímos e somamos $f(x + \Delta x).g(x)$ no numerador da fração, a fim de obter as duas frações que no limite fornecem as derivadas, respectivamente de **g** e **f**. Essas derivadas existem por hipótese. Além disso, quando Δx tende a zero, $f(x + \Delta x)$ tende a f(x). Logo

$(f.g)'(x) = f(x).g'(x) + f'(x).g(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$, como queríamos provar.

A derivação do produto de duas funções é a primeira função vezes a derivada da segunda função mais a segunda função vezes a derivada da primeira função. Simbolicamente, se u e v são funções diferenciáveis de x, então

$$D_x(u.v) = uD_x(v) + D_x(u).v \text{ ou } \frac{d}{dx}(u.v) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}.$$

Ou

$$\boldsymbol{h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)}$$

$$\boxed{\boldsymbol{D_x\,[f(x).g(x)] = f(x)\,D_x\,g(x) + g(x) \cdot D_x f(x)}}$$

Exemplos:

a) Calcule a derivada da função $f(x) = (x^2 + x)(x^2 - 1)$.

Solução:

Sendo $\boldsymbol{f'(x)} = (x^2 + x)(x^2 - 1)' + (x^2 - 1)(x^2 + x)'$

$= (x^2 + x)(2x) + (x^2 - 1)(2x + 1)$

$= \boldsymbol{2x^3 + 2x^2 + 2x^3 - 2x + x^2 - 1}$

$= \boldsymbol{4x^3 + 3x^2 - 2x - 1}$

b) Encontre h’ (x) se $h(x) = (2x^3 - 4x^2)(3x^5 + x^2)$

Solução:

$$\boldsymbol{h'(x)} = (2x^3 - 4x^2)(15x^4 + 2x) + (3x^5 + x^2)(6x^2 - 8x) =$$

$$= (\mathbf{30x^7 - 60x^6 + 4x^4 - 8x^3}) + (\mathbf{18x^7 - 24x^6 + 6x^4 - 8x^3})$$

$$= \mathbf{48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3}$$

Observação: Se a multiplicação for efetuada antes da derivação, o resultado será o mesmo. Fazendo isso, temos

$$\boldsymbol{h(x) = 6x^8 - 12x^7 + 2x^5 - 4x^4}$$

$$\boldsymbol{h'(x) = 48x^7 - 84x^6 + 10x^4 - 16x^3}$$

2.1.6- Regra do Quociente

Se f e g forem funções e se h for a função definida por

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad \text{onde } g(x) \neq 0$$

então se $f'(x)$ e $g'(x)$ existirem,

$$h'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Prova

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{f(x + \Delta x)}{g(x + \Delta x)} - \dfrac{f(x)}{g(x)}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

Se somarmos e subtrairmos $f(x).g(x)$ ao denominador, então

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x + \Delta x) + f(x) \cdot g(x)}{\Delta x \cdot g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left[g(x) \cdot \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right] - \left[f(x) \cdot \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \right]}{g(x) \cdot g(x + \Delta x)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} - \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x) \cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x)}$$

Como g é derivável, em x, então g será contínua em x; assim temos que $\lim_{\Delta x \to 0} g(x + \Delta x) = g(x)$. Além disso, $\lim_{\Delta x \to 0} g(x) = g(x)$ e $\lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Com esses resultados e as definições de $f'(x)$ e $g'(x)$ obtemos

$$h'(x) = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x) \cdot g(x)}$$

$$= \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

$$\boxed{D_x\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)D_x f(x) - f(x)D_x g(x)}{[g(x)]^2}}$$

A derivada do quociente de duas funções é a fração tendo denominador o quadrado do denominador original e como numerador o denominador vezes a derivada do numerador menos o numerador vezes a derivada do denominador, se essas derivadas existirem.

Simbolicamente: $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \rightarrow f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v\prime(x)}{(v(x))^2}$

Exemplos:

a) Ache $D_x(\frac{2x^3+4}{x^2-4x+1})$

$$D_x\left(\frac{2x^3 + 4}{x^2 - 4x + 1}\right) = \frac{(x^2 - 4x + 1)(6x^2) - (2x^3 + 4)(2x - 4)}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{6x^4 - 24x^3 + 6x^2 - 4x^4 + 8x^3 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

$$= \frac{2x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 8x + 16}{(x^2 - 4x + 1)^2}$$

b) Sendo $f(x) = \frac{x^2-5x}{2x-3}$, calacule $f'(x)$.

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{u'(x).v(x) - u(x).v'(x)}{(v(x))^2}}$$

$$f'x) = \frac{(2x-5).(2x-3) - (x^2-5x).2}{(2x-3)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^2 - 6x - 10x + 15 - 2x^2 + 10x}{4x^2 - 12x + 9}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 6x + 15}{4x^2 - 12x + 9}$$

2.1.7- Regra da Potência com Expoente Negativo

Se $f(x) = x^{-n}$, onde $-n$ é um inteiro negativo e $x \neq 0$, então
$f'(x) = -nx^{-n-1}$

Prova

Se – n for um inteiro negativo, então n será um inteiro positivo. Escrevemos então $f(x) = \frac{1}{x^n}$

$$f'(x) = \frac{x^n \cdot 0 - 1 \cdot nx^{n-1}}{(x^n)^2}$$

$$= \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -nx^{n-1-2n}$$

$$= -nx^{-n-1}$$

Exemplos:

a) Ache $\frac{d}{dx}(\frac{3}{x^5})$

Solução:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^5}\right) = \frac{d}{dx}(3x^{-5})$$
$$= 3(-5x^{-6})$$
$$= -\frac{15}{x^6}$$

b) $Diferencief(x) = \frac{1}{x^2}$

Sendo $f(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow f(x) = x^{-2}$

$$\boldsymbol{f'(x) = \frac{d}{d(x)}(x^{-2}) = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}}$$

2.2- Derivadas das Funções Trigonométricas

2.2.1- Derivada da Função Seno

Para mostrar que a função seno possui uma derivada, aplica-se a identidade trigonométrica $sen\,(a+b) = sena.cosb + cosa.senb$, bem como alguns teoremas.

Seja f a função seno, assim $f(x) = sen\,x$. Da definição de derivada,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{sen}(x + \Delta x) - \text{sen}\,x}{\Delta x}$$

A identidade trigonométrica para $sen\,(x + \Delta x)$é $usada\ para\ obter$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos(\Delta x) + \cos x \operatorname{sen}(\Delta x) - \operatorname{sen} x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) + \left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} \qquad \text{(I)}$$

Dos teoremas:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x} = 0 \qquad \text{(II)}$$

e

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x} = 1 \qquad \text{(III)}$$

Substituindo (II) e (III) em (I):

$$f'(x) = -0 \cdot \operatorname{sen} x + \cos x \cdot 1$$
$$= \cos x$$

Concluindo : $\boldsymbol{D_x(senx) = \cos x}$

Exemplo:

Ache $f'(x) \quad se \quad f(x) = x^2.senx$

Solução: Para encontrarmos essa derivada vamos aplicar a Regra do Produto.

$$f'(x) = x^2.D_x(senx) + D_x(x^2).senx = x^2.cosx + 2x.senx$$

2.2.2- Derivada da Função Cosseno

Para descobrirmos a derivada da função seno, podemos aplicar a identidade trigonométrica $cos\,(a+b) = cosa.cosb - sena.senb$. Se g for a função cosseno, então

$$g(x) = \cos x$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cos(\Delta x) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x[\cos(\Delta x) - 1]}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

$$= -\lim_{\Delta x \to 0} \frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}\left(\lim_{\Delta x \to 0} \cos x\right) - \left(\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{sen} x\right) \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen}(\Delta x)}{\Delta x}$$

Substituindo em $cos\ (a + b) = cosa.cosb - sena.senb$, encontramos:

$$\begin{aligned} g'(x) &= -0 \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot 1 \\ &= -\operatorname{sen} x \end{aligned}$$

Concluindo : $\boldsymbol{D_x(cosx) = -senx}$

Exemplo:

Ache $\frac{dy}{dx}$ se $y = \frac{sen\ x}{1 - 2.cosx}$

Aplicando a Regra do quociente, encontramos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - 2\cos x)\, D_x(sen\ x) - \operatorname{sen} x \cdot D_x(1 - 2\cos}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{(1 - 2\cos x)(\cos x) - \operatorname{sen} x(2 \operatorname{sen} x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2(\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x)}{(1 - 2\cos x)^2}$$

$$= \frac{\cos x - 2}{(1 - 2\cos x)^2}$$

2.2.3- Derivada das Funções Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante

As derivadas das funções tangente, cotangente, secante e cossecante são determinadas através das identidades trigonométricas abrangendo o seno e o cosseno, bem como suas derivadas e teoremas sobre derivação. Para a derivada da tangente utilizamos as identidades:

$$tgx = \frac{senx}{cosx} \quad , \quad \sec x = \frac{1}{cosx} \quad e \quad sen^2x + cos^2x = 1$$

Teorema: $\mathbf{D_x(tgx) = sec^2x}$

Prova:

$$\begin{aligned} D_x(\mathrm{tg}\ x) &= D_x\left(\frac{\mathrm{sen}\ x}{\cos x}\right) \\ &= \frac{\cos x \cdot D_x(\mathrm{sen}\ x) - \mathrm{sen}\ x \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{(\cos x)(\cos x) - (\mathrm{sen}\ x)(-\mathrm{sen}\ x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \sec^2 x \end{aligned}$$

Teorema: $\mathbf{D_x(cotgx) = -cossec^2x}$

Prova:

Serão utilizadas as identidades:

$$\mathbf{cotgx = \frac{cosx}{senx}} \quad \text{e} \quad \mathbf{cossecx = \frac{1}{senx}}$$

$$\mathbf{D_x(cotgx) = -cossec^2x}$$

$$= \mathbf{D_x(cotgx)} = D_x(\frac{cosx}{senx})$$

$$= \frac{senx.D_x(cosx) - cosx.D_x(senx)}{sen^2x}$$

$$= \frac{senx.(-senx) - cosx.(cosx)}{sen^2x}$$

$$= \frac{(-\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{cos}^2\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{-(\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x} + \boldsymbol{cos}^2\boldsymbol{x})}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}} = \frac{-\mathbf{1}}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}} = -\mathrm{cossec}^2\mathrm{x}$$

Teorema: $\mathbf{D_x(secx) = secx.\,tgx}$

Prova:

$$D_x(\sec x) = D_x\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$= \frac{\cos x \cdot D_x(1) - 1 \cdot D_x(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\operatorname{sen} x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$= \sec x \operatorname{tg} x$$

Teorema: $\mathbf{D_x(cossecx) = -cossecx.\,cotgx}$

Prova:

$$\boldsymbol{D_x(cossecx)} = \boldsymbol{D_x}\left(\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{senx}}\right)$$

$$= \frac{\boldsymbol{senx.D_x}(\mathbf{1}) - \mathbf{1}.\boldsymbol{D_x(senx)}}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{senx}.\mathbf{0} - \mathbf{1}.\boldsymbol{cosx})}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}}$$

$$= \frac{-\boldsymbol{cosx}}{\boldsymbol{sen}^2\boldsymbol{x}} = \frac{-\mathbf{1}}{\boldsymbol{senx}}.\frac{\boldsymbol{cosx}}{\boldsymbol{senx}} = -\boldsymbol{cossecx}\,.\,\boldsymbol{cotgx}$$

Exemplo:

Calcule $\frac{d}{dx}\,(\boldsymbol{tgx.secx})$

Solução:

$$\frac{d}{dx}(\text{tg } x \sec x) = \text{tg } x \cdot \frac{d}{dx}(\sec x) + \frac{d}{dx}(\text{tg } x) \cdot \sec x$$
$$= \text{tg } x(\sec x \text{ tg } x) + \sec^2 x(\sec x)$$
$$= \sec x \text{ tg}^2 x + \sec^3 x$$

LEMBRETES

a) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{senx}) = \mathbf{cos}\,\boldsymbol{x}$

b) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{cosx}) = -\boldsymbol{senx}$

c) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{tgx}) = \boldsymbol{sec}^2\boldsymbol{x}$

d) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{cotgx}) = -\boldsymbol{cossec}^2\boldsymbol{x}$

e) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{secx}) = \boldsymbol{secx.tgx}$

f) $\frac{d}{dx}(\boldsymbol{cossecx}) = -\boldsymbol{cossecx.cotgx}$

2.3- Regra da Cadeia Para Derivação de Função Composta

Para encontrar a derivada de uma função composta empregamos um dos mais importantes teoremas do Cálculo conhecido como Regra da Cadeia.

A regra da cadeia é uma regra de derivação que nos permite calcular a derivada de uma composição (ou um encadeamento) de funções, tais como f(g(x)) ou f(g(h(x))), conhecendo-se as derivadas f'(x), g'(x) e h'(x).

Se a função g for derivável em x e a função f for derivável em g(x), então a função composta fog será derivável em x, e $(fog)'(x) = f'\big(g(x)\big).g'(x)$.

Se a notação de Leibniz for usada para a derivada , a regra da cadeia poderá ser enunciada do seguinte modo:

Se y for uma funçaõ de u, definida por $y = f(u)$ e $\frac{dy}{du}$ exiztir, e se u for uma função de x, definida por $u = g(x)$ e $\frac{du}{dx}$ existir, então y será uma função de x e $\frac{dy}{dx}$ existirá e será dada por

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}}$$

Outra maneira de **escrever a regra da cadeia é fazer a substituição** $u = g(x)$. Então

$$(f \circ g)(x) = f(u) \qquad (f \circ g)'(x) = D_x f(u) \qquad f'(g(x)) = f'(u) \qquad g'(x) = D_x u$$

Com essas substituições torna-se

$$\boxed{D_x[f(u)] = f'(u) D_x u}$$

que poderá ser usada para enunciar fórmulas importantes de derivação, como as fórmulas envolvendo as derivadas das funções trigonométricas.

$D_x(\text{sen } u) = \cos u \, D_x u$	$D_x(\cos u) = -\text{sen } u \, D_x u$
$D_x(\text{tg } u) = \sec^2 u \, D_x u$	$D_x(\text{cotg } u) = -\text{cosec}^2 u \, D_x u$
$D_x(\sec u) = \sec u \, tg \cdot u \, D_x u$	$D_x(\text{cosec } u) = -\text{cosec } u \text{ cotg } u \, D_x u$

Prova da Regra da Cadeia

Sejam y=h(u) e u=g(x) duas funções deriváveis, com $\text{Im } g \subset \text{Dom } h$, e consideremos a função composta y=f(x)=h[g(x)]. Então f é derivável e f '(x)=h'(g(x)).g'(x), para todo x pertencente ao Dom g.

Por **hipótese**, existem:

$$g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} \text{ e } h'(u) = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{h(u + \Delta u) - h(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta h}{\Delta u}$$

A **tese** a ser demonstrada é que existe

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

e que f '(x)=h'(g(x)).g'(x), para todo x pertencente ao Dom g.

Demonstração:

Precisamos mostrar que existe o seguinte limite:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(g(x+\Delta x)) - h(g(x))}{\Delta x}$$.

Sendo u=g(x), colocamos $\Delta u = g(x+\Delta x) - g(x)$.

Então, Δu depende de Δx e, quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta u \to 0$.

Temos assim, $g(x+\Delta x) = g(x) + \Delta u = u + \Delta u$ e podemos escrever:

h(g(x))=h(u) e $h(g(x+\Delta x)) = h(u+\Delta u)$

Assim, $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta x}$

Suponhamos que $\Delta u \neq 0$. Então,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(u+\Delta u) - h(u)}{\Delta u} \cdot \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \qquad (*)$$

Quando $\Delta x \to 0$, temos $\Delta u \to 0$, e utilizando a hipótese, temos:

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} =$ h'(g(x)).g'(x), o que completa a prova **no caso em que $\Delta u \neq 0$**.

Entretanto, essa prova não é geral porque para valores arbitrariamente pequenos de Δx poderia acontecer que o acréscimo fosse zero, o que invalida a última passagem de (*).

Exemplificando:

Quando temos uma função composta $y = (x^3 + x - 1)^{10}$, ela pode ser decomposta em funções elementares, tais como:

$$y = u^{10} \text{ , } u = x^3 + x - 1.$$

Na notação de Leibniz, a regra da cadeia nos diz que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

Assim, teremos :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= 10u^9 . (3x^2 + 1)$$

$$= 10(x^3 + x - 1)^9 (3x^2 + 1)$$

Passando da notação de Leibniz para a notação de Lagrange, temos:

$$y = f(u) \text{ , } u = g(x)$$

e então:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

$$= f'(u) . g'(x)$$

$$= f'\big(g(x)\big) . g'(x)$$

Revisando: Derivação em Cadeia

Se $y = f(u)$, $u = g(x)$, então

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx}$$

Em outras palavras, sendo $y = f(\ g(\ x\ ))$, tem-se:

$$y' = \big[f\big(g(x)\big)\big]' = f'\big(g(x)\big) . g'(x)$$

Exemplos:

a) Encontre $f'(t)$ se $f(t) = tg(3t^2 + 2t)$.

Solução: Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} F'(t) &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot D_t(3t^2 + 2t) \\ &= \sec^2(3t^2 + 2t) \cdot (6t + 2) \\ &= 2(3t + 1) \sec^2(3t^2 + 2t) \end{aligned}$$

b) Encontre $\frac{dy}{dx}$ se $y = sen(cosx)$

Solução: Aplicando a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \cos(\cos x)[D_x(\cos x)] \\ &= \cos(\cos x)[-\operatorname{sen} x] \\ &= -\operatorname{sen} x\,[\cos(\cos x)] \end{aligned}$$

c) Encontre $f'(x)$ se $f(x) = (3x^2 + 2)^2(x^2 - 5x)^3$.

Solução:

Considerando f como o produto de duas funções g e h, em que $g(x) = (3x^2 + 2)^2$ e $h(x) = (x^2 - 5x)^3$, pode-se utilizar

$$f'(x) = g(x)h'(x) + h(x)g'(x)$$

Encontramos h'(x) e g'(x) pela regra da cadeia

$$\begin{aligned} f'(x) &= (3x^2 + 2)^2[3(x^2 - 5x)^2(2x - 5)] + (x^2 - 5x)^3[2(3x^2 + 2)(6x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[(3x^2 + 2)(2x - 5) + 4x(x^2 - 5x)] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2[6x^3 - 15x^2 + 4x - 10 + 4x^3 - 20x^2] \\ &= 3(3x^2 + 2)(x^2 - 5x)^2(10x^3 - 35x^2 + 4x - 10) \end{aligned}$$

d)Calcule $D_x(sec^4.2x^2)$

Solução:

Usando a regra da cadeia duas vezes

$$
\begin{aligned}
D_x(\sec^4 2x^2) &= 4\sec^3 2x^2[D_x(\sec 2x^2)] \\
&= 4\sec^3 2x^2[(\sec 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)\, D_x(2x^2)] \\
&= (4\sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2)(4x) \\
&= 16x \sec^4 2x^2 \operatorname{tg} 2x^2
\end{aligned}
$$

e) Calcular $\frac{dy}{dx}$, sendo $y = ((x^2 + 1)^{10} + 1)^8$

Solução:

Escrevemos $y = u^8$, $u = v^{10} + 1$ e $v = x^2 + 1$.

Dessa forma estamos compondo (encadeando) três funções. Aplicando a Regra da Cadeia, teremos:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} \\
&= \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx} \\
&= 8u^7 \cdot 10v^9 \cdot 2x \\
&= 160(v^{10}+1)^7(x^2+1)^9 x \\
&= 160x((x^2+1)^{10}+1)^7(x^2+1)^9
\end{aligned}
$$

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

1-Calcule a derivada de cada uma das funções abaixo.

a) $f(x) = 2\operatorname{sen} x + 5\cos x$

b) $g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$

c) $h(x) = -6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 8$

d) $i(x) = x^2 . \operatorname{sen} x$

e) $j(x) = (x^2 - 4).e^x$

f) $l(x) = \frac{3}{x}\cdot(10 + \sqrt{x} - e^x)$

SOLUÇÃO:

a)

$$f(x) = 2\text{sen}\,x + 5\cos x$$

Se: $g_1(x)=\text{sen}\,x$, temos $g_1'(x)=\cos x$.

Por outro lado, se $h_1(x)=2\text{sen}\,x$, temos $h_1'(x)=2\cos x$.

Também, se $g_2(x)=\cos x$, temos $g_2'(x)=-\text{sen}\,x$.

E, se $h_2(x)=5\cos x$, temos $h_2'(x)=-5\text{sen}\,x$.

Agora, como a função f é a soma das funções h_1 e h_2, temos: $f'(x)=h_1'(x)+h_2'(x)$

ou seja, $f'(x)=2\cos x-5\text{sen}\,x$.

b)

$$g(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$$

Como **g** é a soma das funções $g_1(x) = \frac{1}{x}$ e $g_2(x) = \sqrt{x}$, com $g_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $g_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

temos:

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

c)

$$h(x) = -6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x - 8$$

A função h é um polinômio do quarto grau e, logo é a soma de várias parcelas do tipo: $k.x^n$, em que n é um número natural.

Como a derivada de $f(x)=x^n$ é $\mathbf{f'(x)=n.x^{n-1}}$**,**

e a derivada de $g(x)=k.x^n$ é $\mathbf{g'(x)=k.\ n.x^{n-1}}$,

podemos calcular a derivada de **h**, obtendo:

$$h'(x) = -6.4.x^3 + 2.3.x^2 - 5.2.x + 4 - 0 = -24x^3 + 6x^2 - 10x + 4$$

d)

$$i(x) = x^2.\operatorname{sen} x$$

A função **i** é o produto de duas funções: f(x)=x^2, cuja derivada é f'(x)=2x, e g(x)=sen x, cuja derivada é g'(x)=cos x.

Assim sendo, a derivada da função i é:

$$i'(x) = 2x.\operatorname{sen} x + x^2.\cos x = x.(2\operatorname{sen} x + x\cos x)$$

e)

$$j(x) = (x^2 - 4).e^x$$

A função **j** é o produto de duas funções: f(x)=x^2-4, cuja derivada é: f'(x)=2x, e g(x)=e^x, cuja derivada é g'(x)=e^x.

Logo,

$$j'(x) = 2x.e^x + (x^2 - 4).e^x = e^x(2x + x^2 - 4)$$

f)

$$l(x) = \frac{3}{x}\cdot(10 + \sqrt{x} - e^x)$$

A função **l** é o produto de duas funções:

$f(x) = \frac{3}{x}$, cuja derivada é $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$, e $g(x) = 10 + \sqrt{x} - e^x$, cuja derivada é $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^x$.

Logo,

$$l'(x) = -\frac{3}{x^2}.(10 + \sqrt{x} - e^x) + \frac{3}{x}.\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - e^x\right)$$

2- Sejam $f(x) = \sqrt{x} + 4$ e $g(x) = x^2 + 4$. Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de p(x)=f(x).g(x) quando x=1.

SOLUÇÃO:

Sabemos que, a equação da reta tangente ao gráfico da função p, no ponto de abscissa x=1, é dada por: $y - p(1) = p'(1).(x - 1)$.

Como $p(x) = f(x).g(x) = (\sqrt{x} + 4)(x^2 + 4)$:

Temos que:

$p'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

Mas, sendo $f(x) = \sqrt{x} + 4$ e $g(x) = x^2 + 4$, temos:

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 2x$

Logo, $p'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}.(x^2 + 4) + (\sqrt{x} + 4)2x$

e, portanto,

$$p'(1) = \frac{1}{2}.5 + 5.2 = \frac{5}{2} + 10 = \frac{25}{2}$$

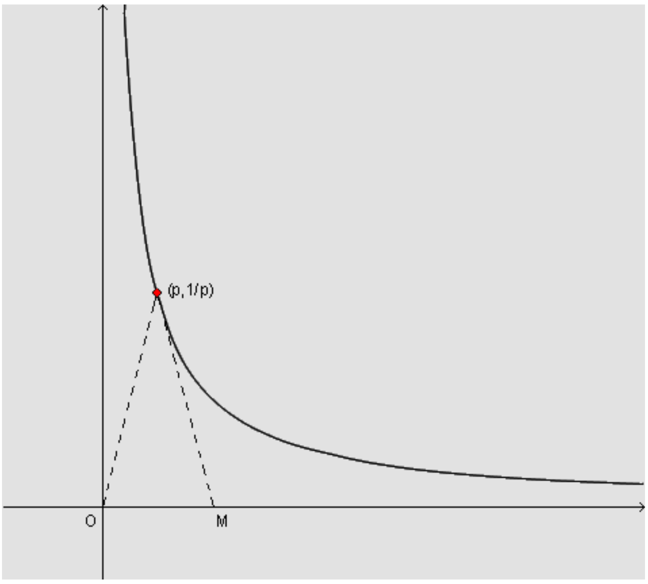
Como p(1)=f(1).g(1)=25, temos:

$$y - 25 = \frac{25}{2}.(x - 1)$$
$$y = \frac{25x}{2} - \frac{25}{2} + 25$$
$$y = \frac{25}{2}(x + 1).$$

3- Seja P um ponto da curva $y = \dfrac{1}{x}$ no primeiro quadrante. Mostre que o triângulo determinado pelo eixo x, a tangente em P e pela reta que liga P à origem é isósceles e calcule a sua área.

SOLUÇÃO:

A situação é a seguinte:



Já temos dois vértices do triângulo considerado: os pontos (0,0) e $\left(p, \frac{1}{p}\right)$.

O terceiro vértice é a intersecção da reta tangente, no ponto P, à curva $y = \frac{1}{x}$ com o eixo das abscissas.

A eq**uação** da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{1}{x}$, no ponto $P = \left(p, \frac{1}{p}\right)$, é dada por:

$$y - \frac{1}{p} = f'(p).(x - p)$$

Como $f(x) = \frac{1}{x}$, temos $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, logo:

$$y - \frac{1}{p} = -\frac{1}{p^2}(x - p)$$

$$y = \frac{-x}{p^2} + \frac{2}{p}$$

Fazendo y=0, encontramos a intersecção dessa reta com o eixo das abscissas:

$$\frac{x}{p^2} = \frac{2}{p}$$

$$x = \frac{2p^2}{p}$$

$$x = 2p$$

Assim, o terceiro vértice do triângulo é M=(2p,0).

Para mostrar que o triângulo OMP é isósceles, basta mostrar que dois de seus lados têm medidas iguais. Com efeito, temos:

$$MO = med(\overline{MO}) = 2p$$

$$OP = med(\overline{OP}) = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2}} = \sqrt{\frac{p^4+1}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{p^4+1}$$, pois p>0

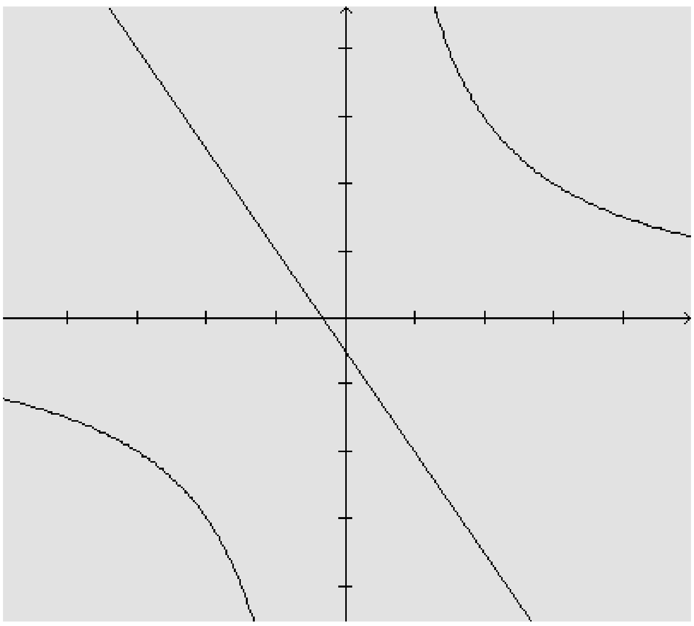
p>0, já que o ponto P está na hipérbole no 1º quadrante. Logo, $\sqrt{p^2} = |p| = p$.

$$MP = med(\overline{MP}) = \sqrt{(p-2p)^2 + \left(\frac{1}{p} - 0\right)^2} = \sqrt{p^2 + \frac{1}{p^2}} = \frac{1}{p}\sqrt{p^4+1}$$, pois p>0.

Logo, OP=MP e o triângulo é isósceles, como queríamos mostrar.

4- Determine todos os pontos da curva $y = \frac{6}{x}$ em que a tangente é paralela à reta 2y+3x+1=0.

SOLUÇÃO: São dadas: a função $y = f(x) = \frac{6}{x}$ e reta 2y+3x+1=0.



Sabemos que duas retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular. Assim, as retas tangentes procuradas têm o mesmo coeficiente angular que a reta 2y+3x+1=0, que pode ser escrita na forma:

$$y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Logo, seu coeficiente angular é $m = -\frac{3}{2}$.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = \frac{6}{x}$ num ponto genérico é dado pela derivada da função **f** na abscissa **x**, ou seja $f'(x) = 6.\left(\frac{-1}{x^2}\right) = -\frac{6}{x^2}$.

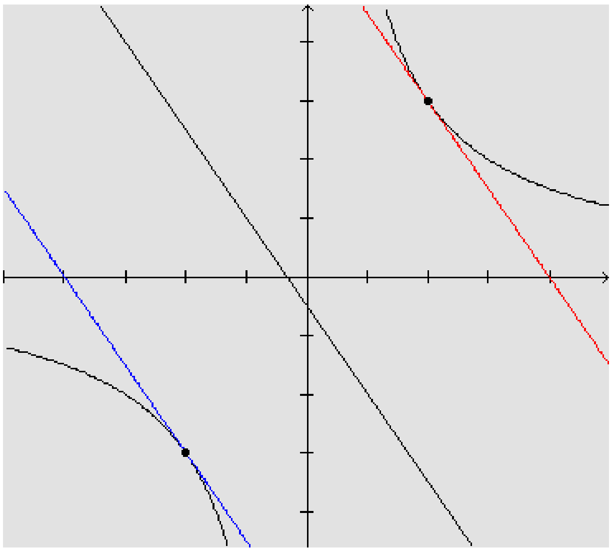
A fim de que a reta tangente procurada seja paralela à reta $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$, é necessário que:

$$-\frac{6}{x^2} = -\frac{3}{2}$$

$$x^2 = 4$$

ou seja, x=2 ou x=-2.

Logo os pontos procurados da curva $y = \frac{6}{x}$ são: (2,f(2)) e (-2,f(-2)), ou seja (2,3) e (-2,-3). Graficamente, temos:



onde as retas encontradas têm equação:

$y - 3 = -\frac{3}{2}(x - 2)$,

ou seja, $y = -\frac{3}{2}x + 6$ que é **a reta tangente à curva no ponto (2,3)**.

e $y + 3 = -\frac{3}{2}(x + 2)$,

ou seja, $y = -\frac{3}{2}x - 6$ que é a **reta tangente à curva no ponto (-2,-3)**.

5- Ache as equações das retas tangente e normal à curva $y = \frac{6}{x+2}$ no ponto (1,2).

SOLUÇÃO:

É dada a função $y = f(x) = \frac{6}{x+2}$.

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de f no ponto (1,2) é dado por f'(1).

Como $f'(x) = -\frac{6}{(x+2)^2}$, temos $f'(1) = -\frac{6}{9} = -\frac{2}{3}$

Logo, a equação da reta tangente procurada é:

$$y - 2 = f'(1).(x - 1)$$

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

ou seja,

$$y = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

A reta normal ao gráfico de uma função, em um ponto, é perpendicular à reta tangente, passando por esse ponto. Logo, o coeficiente angular da normal é o oposto do inverso do coeficiente angular da tangente.

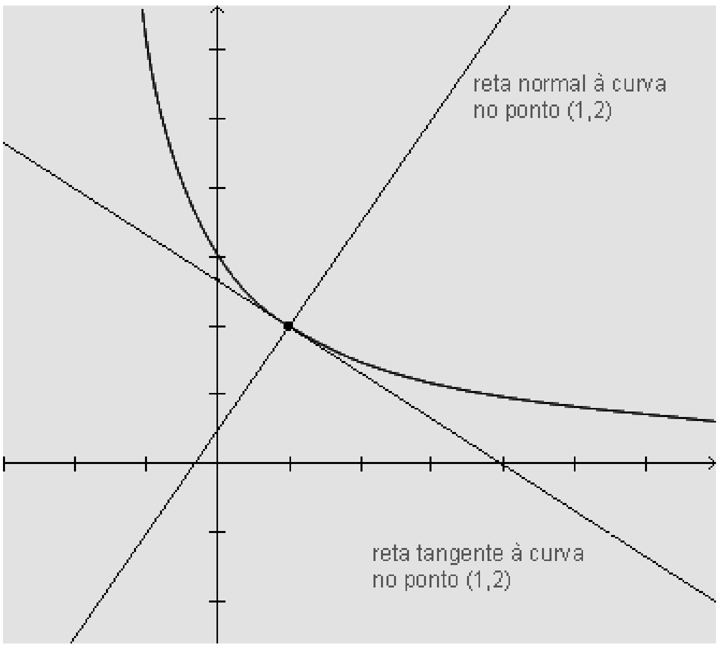
Assim, a equação da reta normal ao gráfico de **f**, no ponto (1,2), é:

$$y - 2 = \frac{3}{2}(x - 1)$$

ou seja,

$$y = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

Graficamente, temos:



2.4 – Derivação Implícita

Seja considerada uma equação nas variáveis x e y. Pode-se dizer que uma função $y = f(x)$ é dada implicitamente por essa equação se, para todo x no domínio de f , o ponto $(x, f(x))$ for solução dessa equação.

Em outras palavras, seja F (x,y) = o uma equação nas variáveis x e y. A função y = f(x) é definida implicitamente pela equação F(x,y), quando F(x,f(x))=0. Ou seja, quando y = f(x) satifaz à equação F (x,y) = 0.

Exemplos:

i) Seja a equação F(x,y) = 0, em que F(x,y) = x^3 + y – 1; a função y = 1 – x^3 é definida implicitamente pela equação F(x,y) =0, pois:

$$F(x,f(x)) = x^3 + (1 - x^3) - 1 = 0$$

ii) Seja a equação F(x,y) = 0, em que F(x,y) = y^4 + x – 1; a função $y = f(x) = \sqrt[4]{1-x}$ é definida implicitamente pela equação F (x,y) = 0, pois:

$$F\big(x, f(x)\big) = \left(\sqrt[4]{1-x}\right)^4 + x - 1 = 0$$

Pode-se calcular a derivada de uma função definida implicitamente sem necessidade de explicitá-la. Para isso, usa-se a Regra da Cadeia. Suponha que F(x,y) = 0 define implicitamente uma função derivável y = f(x). Através de alguns exemplos vamos mostrar que podemos calcular y' sem conhecer y.

Exemplos:

1) Seja y = f(x) uma função derivável definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$.

i) Calcule y'

ii) Verifique que a função $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ é definida implicitamente por $x^2 + y^2=1$ e calcule f '.

Solução:

i) Como y = f(x), temos $x^2 + ((f(x))^2 = 1$. Derivando em relação a x ambos os lados da igualdade e usando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$(x^2)' + (\left(\left(f(x)\right)^2\right)' = 1' => 2x + 2f(x)f'(x) = 0 => x + f(x)f'(x) = 0.$$

Então, $f'(x) = -\frac{x}{f(x)} = -\frac{x}{y}$. Logo, $y' = -\frac{x}{y}$.

ii) É imediato que a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ é definida implicitamente pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{y}$.

2) Dada $(x+y)^2 - (x-y)^2 = x^4 + y^4$, ache $\frac{dy}{dx}$.

Solução:

Derivando implicitamente em relação a x, teremos:

$$2(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) - 2(x-y)\left(1-\frac{dy}{dx}\right) = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$2x + 2y + (2x+2y)\frac{dy}{dx} - 2x + 2y + (2x-2y)\frac{dy}{dx} = 4x^3 + 4y^3\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dy}{dx}(4x - 4y^3) = 4x^3 - 4y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y}{x - y^3}$$

3) Ache uma equação da reta tangente à curva $x^3 + y^3 = 9$, no ponto (1,2).

Solução:

Vamos derivar implicitamente em relação a x.

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Logo, no ponto (1, 2), $\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{4}$. Uma equação da reta tangente é, então,

$$y - 2 = -\tfrac{1}{4}(x-1)$$

$$x + 4y - 9 = 0$$

4) Dada x cos y + y cos x = 1, ache $\frac{dy}{dx}$.

Derivando implicitamente em relação a x, obteremos

$$1 \cdot \cos y + x(-\text{sen } y)\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx}(\cos x) + y(-\text{sen } x) = 0$$

$$\frac{dy}{dx}(\cos x - x \text{ sen } y) = y \text{ sen } x - \cos y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y \text{ sen } x - \cos y}{\cos x - x \text{ sen } y}$$

5) Dada a equação $x^2 + y^2 = 9$, ache

a) $\frac{dy}{dx}$ por derivação implícita;

b) as duas funções definidas pela equação;

c) a derivada de cada função obtida no item b por derivação explícita.

d) Comprove que o resultado obtido no item a está de acordo com os resultados obtidos no item c.

Solução:

a) Vamos derivar implicitamente.

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) Resolvendo a equação dada em y

$$y = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad y = -\sqrt{9 - x^2}$$

Sejam f_1 e f_2 as duas funções para as quais

$$f_1(x) = \sqrt{9 - x^2} \quad \text{e} \quad f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$$

c) Como $f_1(x) = (9 - x^2)^{1/2}$ e $f_2(x) = -(9 - x^2)^{1/2}$, pela Regra da Cadeia obtemos

$$f_1'(x) = \tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x) \qquad f_2'(x) = -\tfrac{1}{2}(9 - x^2)^{-1/2}(-2x)$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}} \qquad\qquad = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

d) Para $y = f_1(x)$ em que, $f_1(x) = \sqrt{9 - x^2}$, segue do item (c) que

$$f_1'(x) = -\frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

O que está de acordo com o item a. Para $y = f_2(x)$, em que $f_2(x) = -\sqrt{9 - x^2}$, temos do item (c)

$$f_2'(x) = \frac{x}{\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{-\sqrt{9 - x^2}}$$

$$= -\frac{x}{y}$$

o que também está de acordo com o resultado obtido no item a.

6) a) Se $x^2 + y^2 = 25$, encontre $\frac{dy}{dx}$.

b) Encontre uma equação tangente ao círculo $x^2 + y^2 = 25$ no ponto (3,4).

Solução 1:

a) Diferencie ambos os lados da equação $x^2 + y^2 = 25$.

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

Lembrando que y é uma função de x e usando a Regra da Cadeia, temos

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dy}(y^2)\frac{dy}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Assim, $2x + 2y\,\frac{dy}{dx} = 0$

Agora, vamos resolver essa equação para $\frac{dy}{dx}$.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

b) No ponto (3,4) temos x = 3 e y = 4; logo:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3}{4}$$

Uma equação da reta tangente ao círculo em (3,4) é, portanto:

$$y - 4 = -\tfrac{3}{4}(x-3) \text{ ou } 3x + 4y = 25.$$

Solução 2:

Resolvendo a equação $x^2 + y^2 = 25$, obtemos $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$. O ponto (3,4) está sobre o semicírculo superior $y = \sqrt{25 - x^2}$, e assim vamos considerar a função $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$. Diferenciando f usando a Regra da Cadeia, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2} \frac{d}{dx}(25 - x^2) \\ &= \tfrac{1}{2}(25 - x^2)^{-1/2}(-2x) \\ &= -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \end{aligned}$$

Logo:

$$f'(3) = -\frac{3}{\sqrt{25 - 3^2}} = -\frac{3}{4}$$

E, como na solução 1, uma equação da reta tangente é $3x + 4y = 25$.

Oservações:

1) O exemplo anterior ilustra que, mesmo quando é possivel resolver uma equação explicitamente para y em termos de x, pode ser fácil usar a diferenciação implícita.

2) A expressão $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ dá a derivada em termos de x e y. Isso está correto independentemente de qual função y ficará determinada pela equação dada. Por exemplo, para $y = f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

Enquanto para $y = g(x) = -\sqrt{25 - x^2}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{-\sqrt{25 - x^2}} = \frac{x}{\sqrt{25 - x^2}}$$

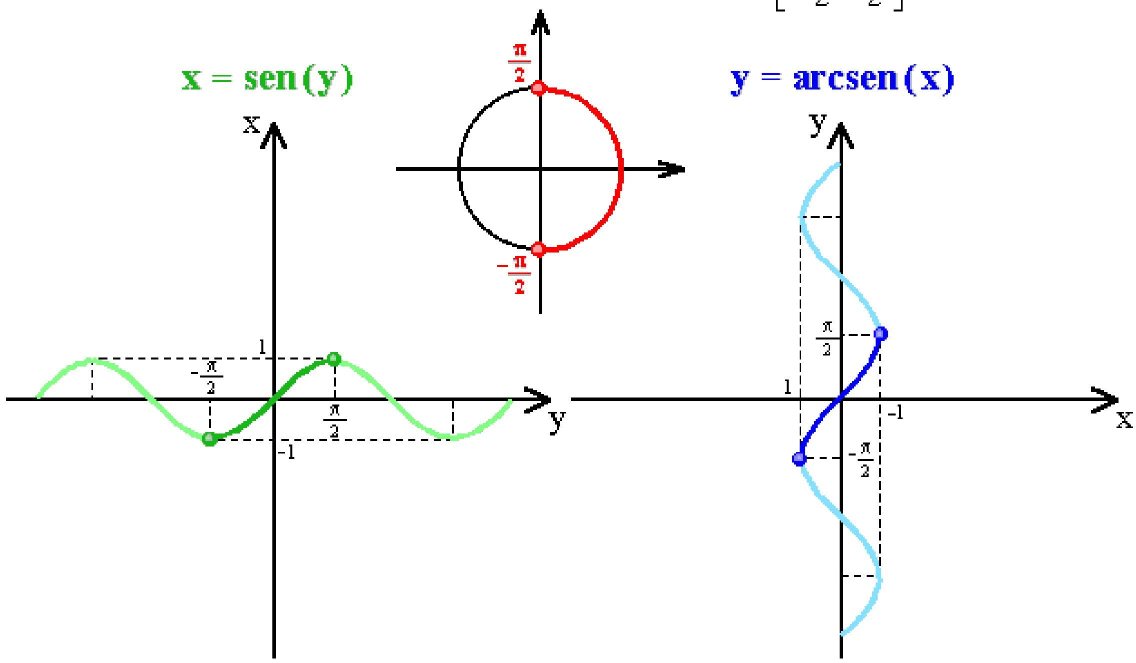
2.5- Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

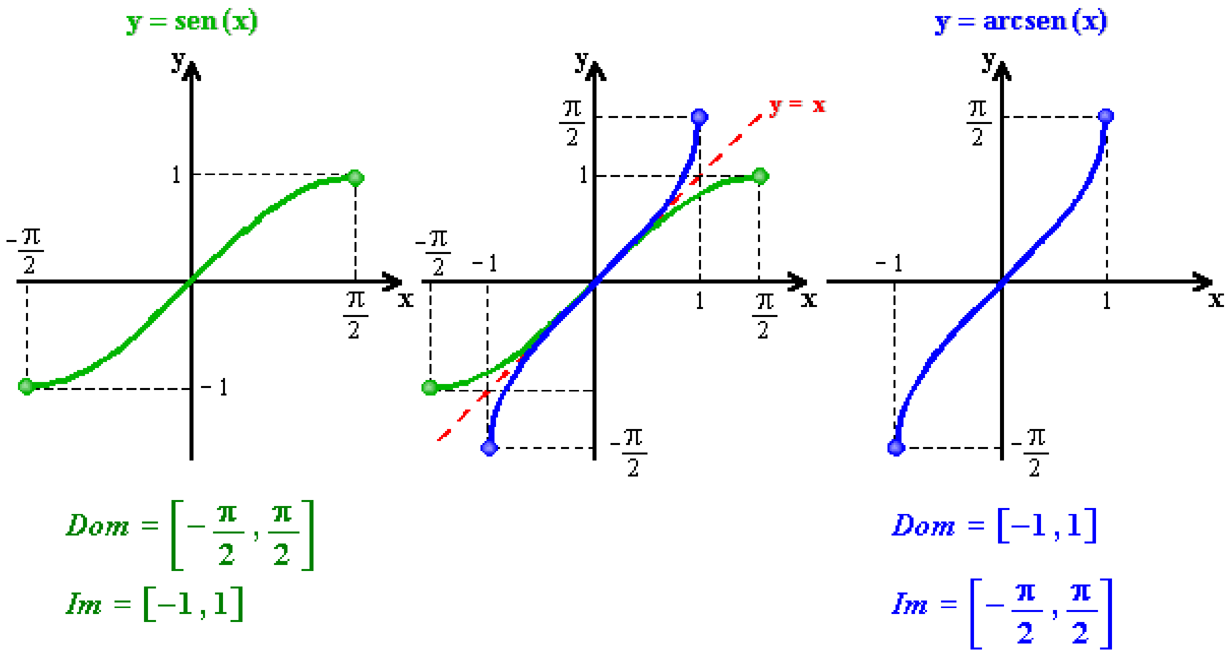
2.5.1- Derivada da função inversa do seno

Pode-se usar a diferenciação implícita para encontrar as derivadas das funções trigonométricas inversas (arcsen, arccos, arctg, etc.).

Lembre-se de que $y = sen^{-1}x$ significa $seny = x$ e $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

$$y = \text{arcsen}(x) \iff x = \text{sen}(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$





Diferenciando $seny = x$ implicitamente em relação a x obtemos:

$$cosy\frac{dy}{dx} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy}.$$

Agora com y≥0, uma vez que $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$, logo:

$$cosy = \sqrt{1 - sen^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$$

Portanto:

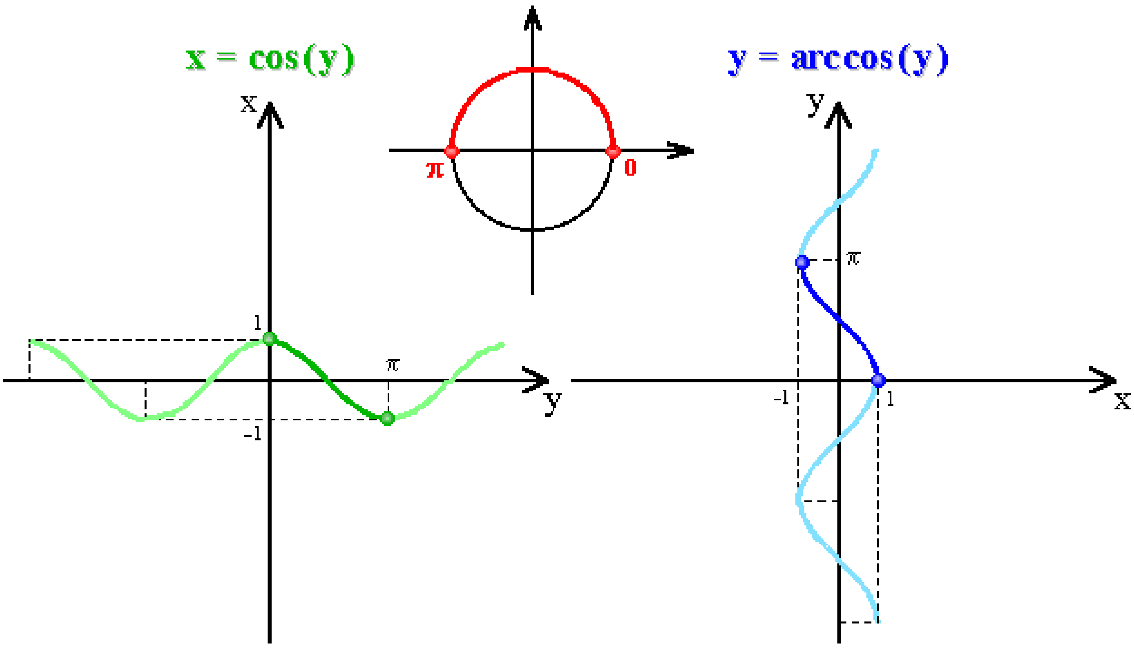
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

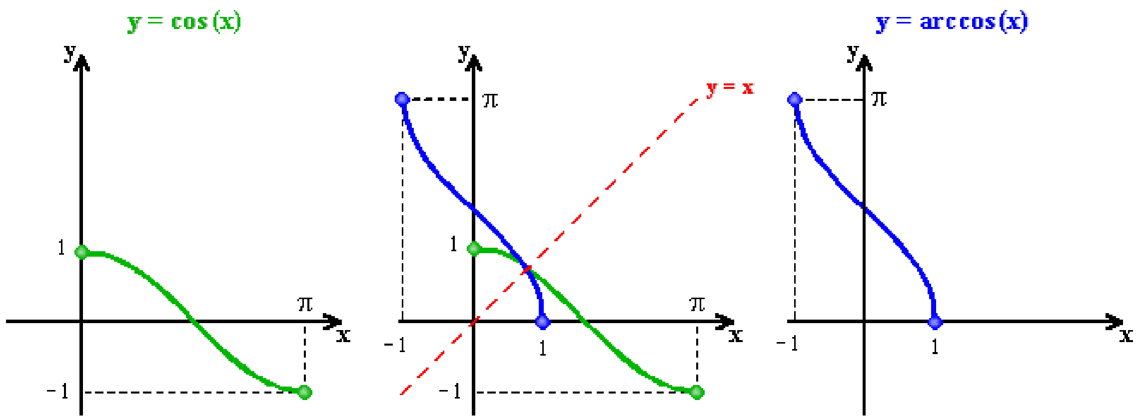
$$\frac{d}{dx}(sen^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{ou} \quad (arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

2.5.2- Derivada da função inversa do cosseno

A função inversa do cosseno, denotada por arccos, é definida como:

$$y = \arccos(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \cos(y) \quad \text{e} \quad y \in [0, \pi]$$





Dom = [0 , π]   *Dom* = [−1 , 1]

Im = [−1 , 1]   *Im* = [0 , π]

- $f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - x^2}}$

Logo , pela Regra da Cadeia , temos :

- $f(x) = \arccos(u(x)) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1 - [u(x)]^2}}\, u'(x)$

$$\bullet\ f(x) = \arccos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Demonstração:

Pela definição, temos que

$$y = \arccos(x) \iff x = \cos(y)\,,\ \ y \in [0, \pi]$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\operatorname{sen}(y)} \overset{\operatorname{sen}(y) = \sqrt{1-\cos^2(y)}\,,\ \forall y \in [0,\pi]}{=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=\!=} \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(y)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

2.5.3- Derivada da função inversa da tangente

A fórmula para a derivada da função arco tangente é deduzida de forma similar. Se $y = tg^{-1}x$, então $tg\,y = x$. Diferenciando essa última equação implicitamente em relação a x, temos:

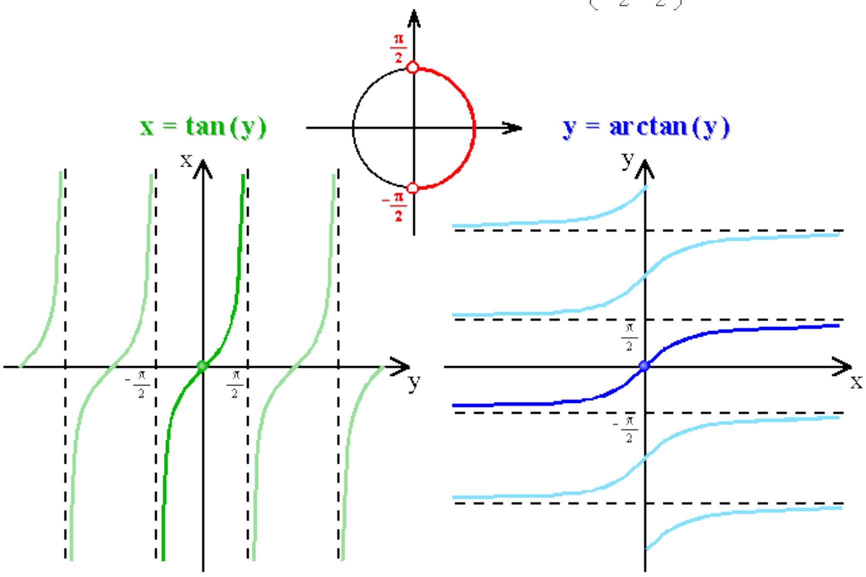
$$sec^2 y \frac{dy}{dx} = 1$$

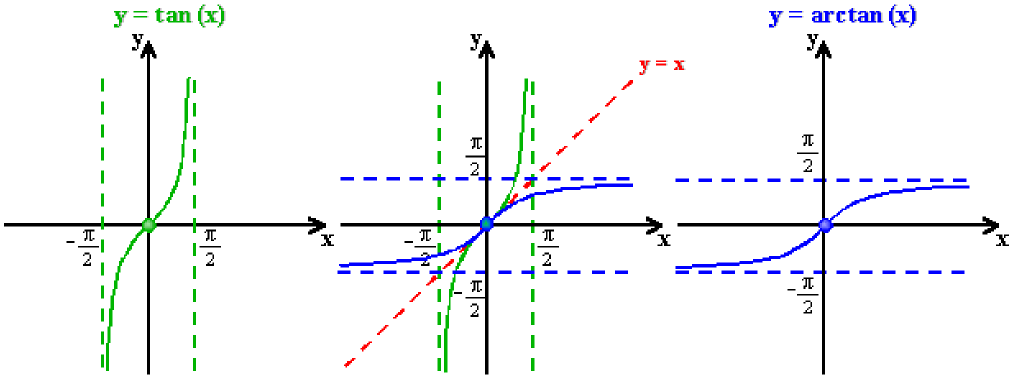
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{sec^2 y} = \frac{1}{1 + tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

Logo:

$$\frac{d}{dx}\,(tg^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \text{ou} \quad (arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

$$y = \arctan(x) \iff x = \tan(y) \quad \text{e} \quad y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$





$$Dom = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \qquad\qquad Dom = \mathbb{R}$$

$$Im = \mathbb{R} \qquad\qquad Im = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

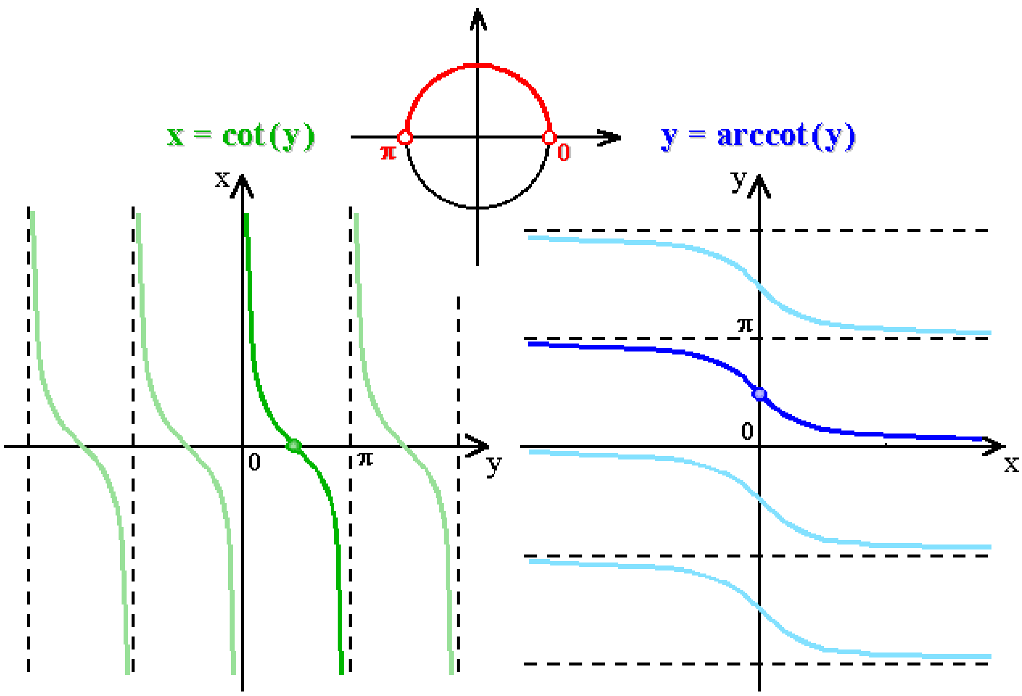
$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^{+}} \tan(x) = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to -\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}$$

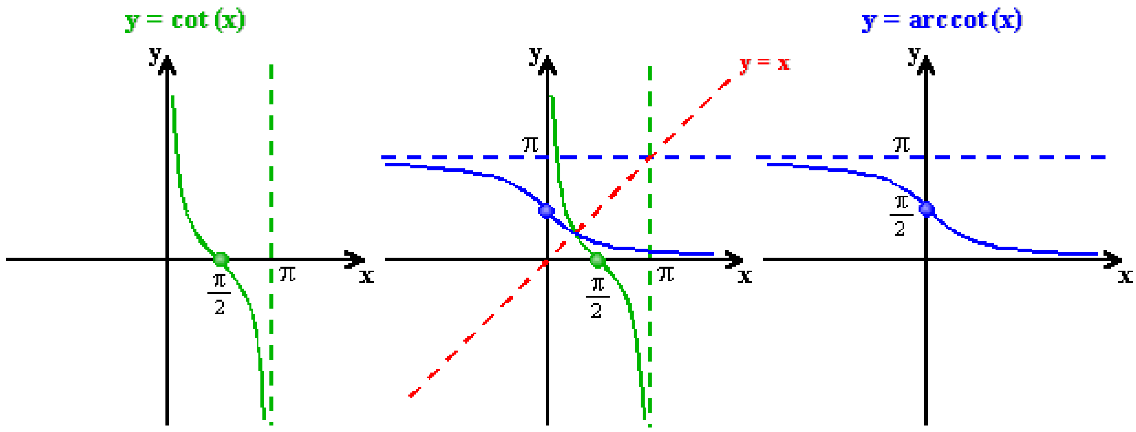
$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^{-}} \tan(x) = +\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

2.5.4- Derivada da função inversa da cotangente

A função inversa da cotangente, denotada por arccotg ou arccot, é definida como:

$$y = \operatorname{arccot}(x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \cot(y) \quad \text{e} \quad y \in (0, \pi)$$





$Dom = (0, \pi)$

$Im = \mathrm{IR}$

$\lim_{x \to 0^+} \cot(x) = +\infty$

$\lim_{x \to \pi^-} \cot(x) = -\infty$

$Dom = \mathrm{IR}$

$Im = (0, \pi)$

$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccot}(x) = \pi$

$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccot}(x) = 0$

- $f(x) = \operatorname{arccot}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$

Logo, pela Regra da Cadeia, temos:

- $f(x) = \operatorname{arccot}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{1+[u(x)]^2}\, u'(x)$

Pela definição, temos que

$$y = \operatorname{arccot}(x) \Leftrightarrow x = \cot(y), \; y \in (0, \pi)$$

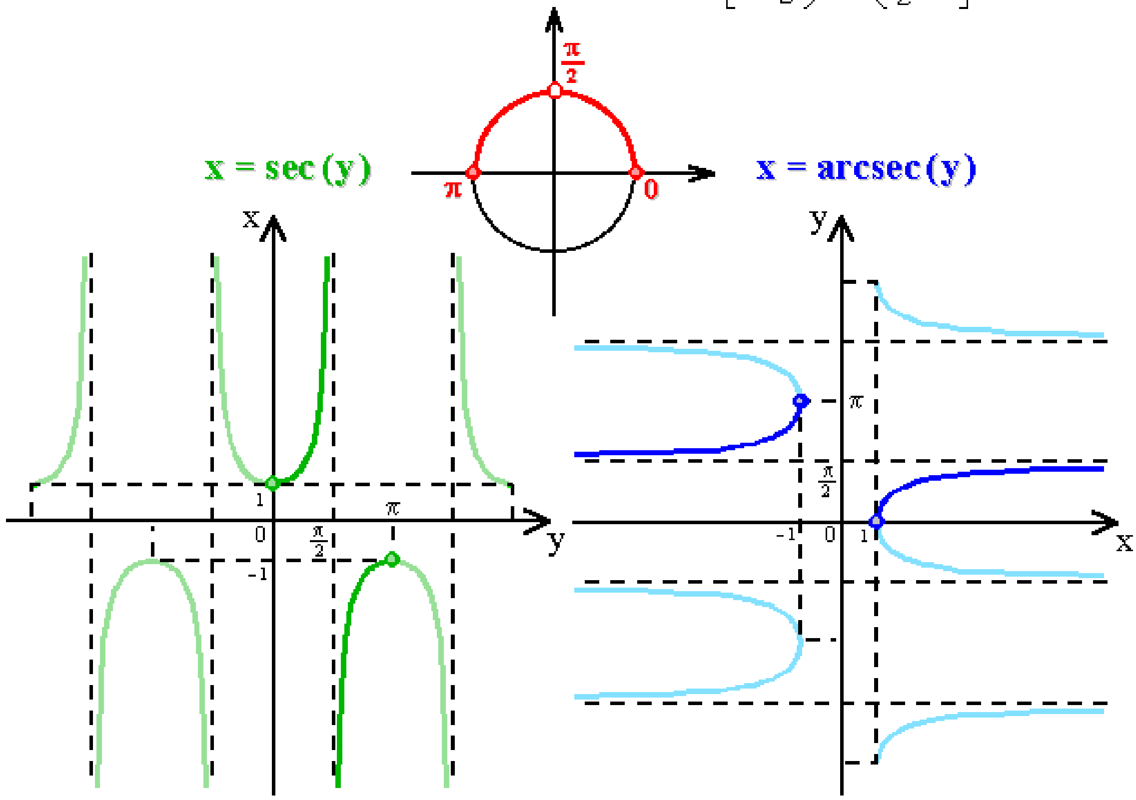
Então,

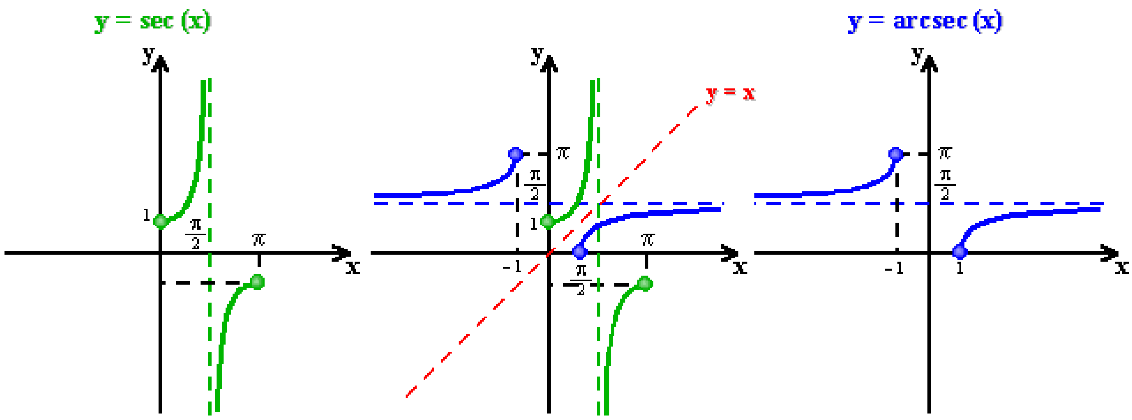
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\csc^2(y)} = \frac{-1}{\csc^2(y)} \overset{\csc^2(y) = 1+\cot^2(y)}{=\!=\!=\!=\!=} \frac{-1}{1+\cot^2(y)} = \frac{-1}{1+x^2}$$

2.5.5- Derivada da função inversa da secante

A função inversa da secante, denotada por arcsec, é definida como:

$$y = \operatorname{arcsec}(x) \iff x = \sec(y) \quad \text{e} \quad y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$





$Dom = \left[0, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$Im = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \sec(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = -\infty$$

$Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

$Im = \left[0, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arcsec}(x) = \frac{\pi}{2}$$

- $f(x) = \text{arcsec}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Logo, pela Regra da Cadeia, temos:

- $f(x) = \text{arcsec}(\text{u}(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|\text{u}(x)|\sqrt{[\text{u}(x)]^2 - 1}}\,\text{u}'(x)$

- $f(x) = \text{arcsec}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Demonstração :

Pela definição, temos que

$$y = \text{arc}\sec(x) \Leftrightarrow x = \sec(y),\ y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{\sec(y)\tan(y)} \underset{\overline{\overline{}}}{\begin{cases} \tan(y) = \sqrt{\sec^2(y) - 1} & \text{se } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \tan(y) = -\sqrt{\sec^2(y) - 1} & \text{se } y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}}$$

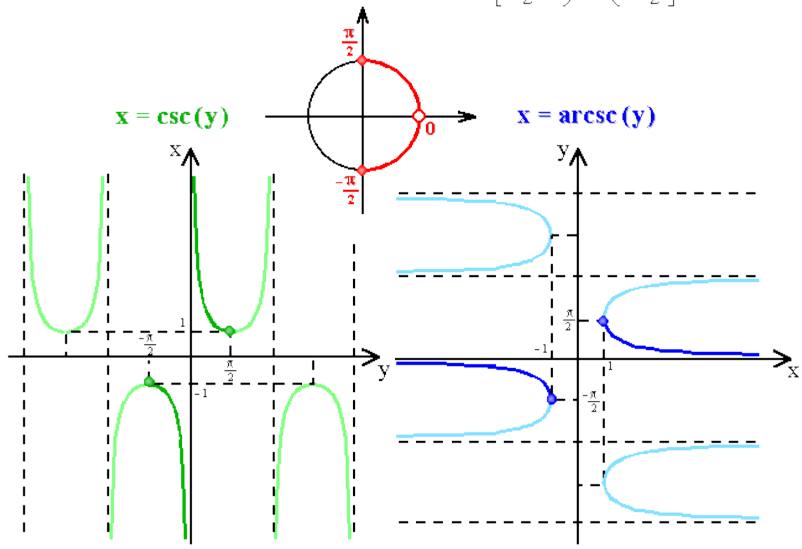
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{\sec(y)\sqrt{\sec^2(y) - 1}} & \text{se } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ \dfrac{1}{-\sec(y)\sqrt{\sec^2(y) - 1}} & \text{se } y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases} \underset{\overline{\overline{}}}{\begin{cases} x = \sec(y) > 0 & \text{se } y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \\ x = \sec(y) < 0 & \text{se } y \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}}$$

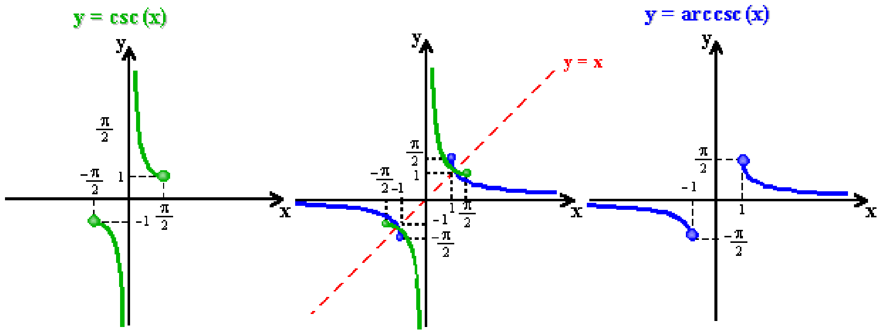
$$= \begin{cases} \dfrac{1}{x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x > 0 \\ \dfrac{1}{-x\sqrt{x^2 - 1}} & \text{se } x < 0 \end{cases} \underset{\overline{\overline{}}}{|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}} \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

2.5.6- Derivada da função inversa da cossecante

A função inversa da cossecante, denotada por arccsc ou arccossec, é definida como:

$$y = \operatorname{arccsc}(x) \iff x = \csc(y) \ \text{ e } \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$





$$Dom = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$Im = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$\lim_{x \to 0^-} \csc(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \csc(x) = +\infty$$

$$Dom = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$

$$Im = \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arccsc}(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} \operatorname{arccsc}(x) = 0$$

- $f(x) = \operatorname{arccsc}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Logo, pela Regra da Cadeia, temos :

- $f(x) = \operatorname{arccsc}(u(x)) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{|u(x)|\sqrt{[u(x)]^2 - 1}}\, u'(x)$

- $f(x) = \operatorname{arccsc}(x) \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$

Demonstração :

Pela definição, temos que

$$y = \operatorname{arccsc}(x) \iff x = \csc(y), \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{-\csc(y)\cot(y)} = \frac{-1}{\csc(y)\cot(y)} \underset{\left\{\begin{array}{ll}\cot(y) = -\sqrt{\csc^2(y)-1} & \text{se } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \cot(y) = \sqrt{\csc^2(y)-1} & \text{se } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.}{=\!=}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{-\csc(y)\sqrt{\csc^2(y)-1}} & \text{se } \; y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ \dfrac{-1}{\csc(y)\sqrt{\csc^2(y)-1}} & \text{se } \; y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \underset{\left\{\begin{array}{ll} x = \csc(y) < 0 & \text{se } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right) \\ x = \csc(y) > 0 & \text{se } y \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]\end{array}\right.}{=\!=}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-1}{-x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } \; x < 0 \\ \dfrac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} & \text{se } \; x > 0 \end{cases} \underset{|x| = \left\{\begin{array}{l} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{array}\right.}{=\!=} \frac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

Tabela: Derivadas das Funções Trigonométricas Inversas

$\frac{d}{dx}(sen^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(cossec^{-1}x) = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}(cos^{-1}x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}(sec^{-1}x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\frac{d}{dx}\,(tg^{-1}x) = \frac{1}{1+x^2}$	$\frac{d}{dx}\,(cotg^{-1}x) = -\frac{1}{1+x^2}$

Exemplos: Calcular as derivadas das funções abaixo.

1) $f(x) = a\, arcsen\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2}$

$$f'(x) = \left[a \operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right]' + \left[\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = a\left[\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{a}\right)\right]' + \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left[a^2 - x^2\right]' =$$

$$= a\,\frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}}\left[\frac{x}{a}\right]' + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\left(0 - 2x\right) =$$

$$= a\,\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}}\left[\frac{1}{a}x\right]' + \frac{1}{2\sqrt{a^2 - x^2}}\left(-2x\right) = a\,\frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}}\,\frac{1}{a}\cdot 1 + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\sqrt{a^2} + x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{|a| + x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

2) $f(x) = arccot\left[\frac{2}{x}\right] + arctan\left[\frac{x}{2}\right]$

$$f'(x) = \left[\operatorname{arccot}\left(\frac{2}{x}\right)\right]' + \left[\arctan\left(\frac{x}{2}\right)\right]' = \frac{-1}{1+\left(\frac{2}{x}\right)^2}\left[\frac{2}{x}\right]' + \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\left[\frac{x}{2}\right]' =$$

$$= \frac{-1}{1+\frac{2^2}{x^2}}\left[2x^{-1}\right]' + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2^2}}\left[\frac{1}{2}x\right]' = \frac{-1}{1+\frac{2^2}{x^2}}\,2\left[x^{-1}\right]' + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2^2}}\,\frac{1}{2}\left[x\right]' =$$

$$= \frac{-1}{1+\frac{2^2}{x^2}}\,2\cdot -1\cdot x^{-2} + \frac{1}{1+\frac{x^2}{2^2}}\,\frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{2}{\frac{x^2+2^2}{x^2}}\,\frac{1}{x^2} + \frac{1}{\frac{2^2+x^2}{2^2}}\,\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2}{x^2+2^2} + \frac{1}{\frac{2^2+x^2}{2}} = \frac{2}{x^2+2^2} + \frac{2}{2^2+x^2} = \frac{4}{4+x^2}$$

3) $f(x) = arccos\left[\frac{3x-1}{3x+1}\right]$

$$f'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^2}}\left[\frac{3x-1}{3x+1}\right]' = \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^2}}\,\frac{\left[3x-1\right]'(3x+1)-(3x-1)\left[3x+1\right]'}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3x+1}\right)^2}}\,\frac{3(3x+1)-(3x-1)\cdot 3}{(3x+1)^2} = \frac{-1}{\sqrt{1-\frac{(3x-1)^2}{(3x+1)^2}}}\,\frac{3\left((3x+1)-(3x-1)\right)}{(3x+1)(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{\frac{(3x+1)^2-(3x-1)^2}{(3x+1)^2}}}\,\frac{3(3x+1-3x+1)}{(3x+1)^2} = \frac{-1}{\frac{\sqrt{(3x+1)^2-(3x-1)^2}}{\sqrt{(3x+1)^2}}}\,\frac{6}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{-\sqrt{(3x+1)^2}}{\sqrt{(3x+1)^2-(3x-1)^2}}\,\frac{6}{(3x+1)^2} = \frac{-|3x+1|}{\sqrt{(9x^2+6x+1)-(9x^2-6x+1)}}\,\frac{6}{(3x+1)^2} =$$

$$= \frac{-|3x+1|}{\sqrt{12x}}\,\frac{6}{(3x+1)^2} = \frac{-|3x+1|}{2\sqrt{3x}}\,\frac{6}{|3x+1|^2} = \frac{-3}{|3x+1|\sqrt{3x}}$$

4) $f(x) = \operatorname{arcsec}(x^3) + \operatorname{arccsc}\left(\sqrt{x^2+4}\right)$

$$f'(x) = \left[\operatorname{arcsec}\left(x^3\right)\right]' + \left[\operatorname{arccsc}\left(\sqrt{x^2+4}\right)\right]' =$$

$$= \frac{1}{\left|x^3\right|\sqrt{\left(x^3\right)^2-1}}\left[x^3\right]' + \frac{-1}{\left|\sqrt{x^2+4}\right|\sqrt{\left(\sqrt{x^2+4}\right)^2-1}}\left[\sqrt{x^2+4}\right]' =$$

$$= \frac{1}{|x|^3\sqrt{x^6-1}}\cdot 3x^2 + \frac{-1}{\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{\left(x^2+4\right)-1}}\left[\left(x^2+4\right)^{\frac{1}{2}}\right]' =$$

$$= \frac{3x^2}{|x|^3\sqrt{x^6-1}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+3}}\,\frac{1}{2}\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{2}}\left[x^2+4\right]' =$$

$$= \frac{3|x|^2}{|x|^3\sqrt{x^6-1}} + \frac{-1}{\sqrt{x^2+4}\cdot\sqrt{x^2+3}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+4}} =$$

$$= \frac{3}{|x|\sqrt{x^6-1}} + \frac{-x}{\left(x^2+4\right)\sqrt{x^2+3}}$$

2.6– Derivadas Superiores

Se f for uma função diferenciável, então sua derivada f' é também uma função, logo f' poderia ter sua própria derivada, denotadas por $(f')' = f''$. Essa nova função f'' é chamada de derivada segunda de f, pois é a derivada da derivada de f. Usando a notação de Leibniz, escrevemos a derivada segunda de $y = f(x)$ como:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

Outra notação é $f''(x) = D^2f(x)$.

A ideia de “segunda derivada” vem naturalmente em conexão com o movimento de uma partícula P ao longo de uma reta orientada.

Seja s = f(t) a função que determina a localização de P no tempo t, chamada de equação do movimento da partícula. A velocidade da partícula P é definida como a taxa de variação da coordenada s de P em relação ao tempo.

Assim, $v = \frac{ds}{dt}$.

Na Física, a variação instantânea de velocidade em relação ao tempo é denominada aceleração de P, logo:

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{d^2 s}{(dt)^2} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

No entanto, a aceleração é a derivada da velocidade ou a segunda derivada da coordenada s em relação ao tempo.

Exemplo 1:

Seja $s = 2t + 3t^2$, para $t > 0$, a equação do movimento de uma partícula P, com s em metros e t em segundos. Determine a velocidade e a aceleração da partícula quando t = 5 segundos.

Solução:

A velocidade da partícula t segundos após sua partida é dado por

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}(2t + 3t^2) = 2 + 6t$$
$$v = 2 + 6t$$

Para t = 5 s, a velocidade de P é dada por

$$v = 2 + 6t$$
$$v = 2 + 6.5$$
$$v = 32m/s$$

A aceleração da partícula t segundos após sua partida é dada pela taxa de variação da velocidade (ou segunda derivada de s), isto é:

$$a = s''(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 6t) = 0 + 6 = 6$$
$$a = 6m/s^2$$

Nota 1:

Uma outra interpretação da segunda derivada de uma função (na área de Economia) é apresentada a seguir:

Suponha que o índice de preços ao consumidor (IPC) de uma economia entre os anos a e b é descrito pela função I (t) ($a \leq t \leq b$).

Assim, a primeira derivada de I, I'(t), fornece a variação da taxa de inflação em qualquer instante de tempo t. Dessa forma, quando um economista alega que a "inflação está diminuindo", ele está querendo dizer que a taxa de inflação está decrescendo. Matematicamente, isso é equivalente a observar que a segunda derivada I''(t) é negativa no instante t considerado.

Podemos observar que I'(t) poderia ser positiva em um instante quando I''(t) fosse negativa (ver exemplo a seguir). Desse modo, não se pode concluir, do exposto, que os preços dos bens e dos serviços estejam prestes a baixar.

Exemplo 2:

O IPC da economia é descrito pela função $I(t) = -0{,}2t^3 + 3t^2 + 100$, $0 \le t \le 9$, em que t = 0 corresponde ao início de 1988. Calcule I'(6) e I''(6) e use esses resultados para mostrar que apesar do IPC estar subindo no início de 1994, "a inflação estava moderada naquele período".

Solução:

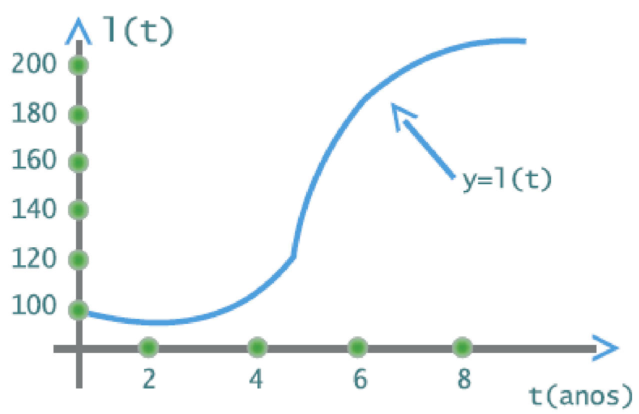
Determinamos I'(t) e I''(t).

$$I(t) = -0{,}2t^3 + 3t^2 + 100$$
$$I'(t) = -0{,}6t^2 + 6t$$
$$I''(t) = -1{,}2t + 6$$

Assim,

$$I'(6) = -0{,}6\,(6)^2 + 6\,(6) = 14{,}4$$
$$I''(6) = -1{,}2(6) + 6 = -1{,}2$$

Os cálculos mostram que no início de 1994 (t=6), o IPC aumentava a uma razão de 14,4 pontos por ano, enquanto a taxa de inflação estava moderada naquela época, como mostra o gráfico abaixo.



Nota 2:

Derivadas de ordem n: De modo geral, se f é uma função diferenciável em algum intervalo aberto, então a derivada f' (derivada primeira) é novamente uma função definida nesste intervalo aberto, e podemos perguntar se f' é diferenciável no intervalo. Se o for, então sua derivada $(f')'$ é escrita, de forma mais simplificada, f'' (lê-se f duas linhas). Denominamos f'' de derivada de segunda ordem, ou simplesmente, de derivada segunda da função f.

Não existe nada que prove ao se tomar, sucessivamente, derivadas de uma função tantas vezes quantas forem necessárias, que as funções derivadas permanecem diferenciáveis em cada etapa. Desse modo, se f é uma função e se f, f', f'' são diferenciáveis num intervalo aberto, nós podemos formar a derivada de terceira ordem, ou derivada terceira, $f''' = (f'')'$; se f''' também diferenciável no intervalo, podemos obter a derivada de quarta ordem, ou derivada quarta, $f'''' = (f''')'$, assim por diante. Se f pode ser sucessivamente diferenciável n vezes, assim, dizemos que f é n vezes diferenciável e escrevemos sua derivada de n-ésima ordem, ou derivada n-ésima como $f(n)$.

Se f é escrita na forma$y = f(x)$, então as notações para suas derivadas são:

$$y',\ y'',\ y''',\ \ldots,\ y^{(n)}$$

$$f^{(1)},\ f^{(2)},\ f^{(3)},\ \ldots.\ f^{(n)}$$

$$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}$$

$$D^{(1)}y,\quad D^{(2)}y,\ D^{(3)}y\ \ldots.\ D^{(n)}y$$

Exemplo 3:

Determine as derivadas de todas as ordens da função polinomial

$$f\ (x) = 3x^5 - 2x^4 + 5x^2 + 2x - 8.$$

Solução:

$$f'(x) = 15x^4 - 8x^3 + 10x + 2$$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} f'(x) = 60x^3 - 24x^2 + 10$$

$$f'''(x) = \frac{d}{dx} f''(x) = 180x^2 - 48x$$

$$f^{(4)}(x) = \frac{d}{dx} f'''(x) = 360x - 48$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(4)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(5)}(x) = 0$$

Sendo uma função constante, todas as derivadas subsequentes serão nulas, isto é , $f(n)(x) = 0$ para n ≥ 6.

Exemplo 4:

Se $f(x) = xcosx$, encontre e interprete $f''(x)$.

Solução:

Usando a Regra do Produto, temos

$$f'(x) = x \frac{d}{dx}(\cos x) + \cos x \frac{d}{dx}(x)$$

$$= -x \operatorname{sen} x + \cos x$$

Para achar $f''(x)$ diferenciamos $f'(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-x \operatorname{sen} x + \cos x)$$

$$= -x \frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) + \operatorname{sen} x \frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= -x \cos x - \operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x$$

$$= -x \cos x - 2 \operatorname{sen} x$$

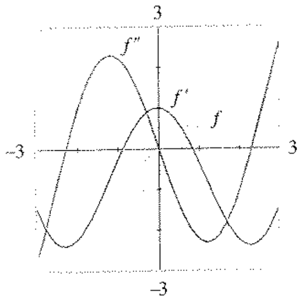


Figura 1

Os gráficos de f, f' e f'' estão mostrados na Figura 1.

Podemos interpretar $f''(x)$ como a inclinação da curva $y = f'(x)$ no ponto (x,$f'(x)$). Em outras palavras, é a taxa de variação da inclinação da curva original $y = f(x)$.

Da figura 1, pode-se observar que $f''(x) = 0$ sempre que $y = f'(x)$ tem uma tangente horizontal. Também, $f''(x)$ é positiva quando $y = f'(x)$ tem inclinação positiva, e negativa quando $y = f'(x)$ tem inclinação negativa. Logo, os gráficos servem como uma verificação sobre nossos cálculos.

Exemplo 5:

Determine o valor da segunda derivada f no ponto x.

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5; x = 1$

b) $f(t) = (3t - 2)^3; x = 2$

Solução:

a) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 5$

$f'(x) = 6x^2 - 2x$

$f''(x) = 12x - 2$ para x = 1, temos:

$f''(1) = 12.1 - 2 = 10$

b) $f(t) = (3t - 2)^3$ fazendo $U = 3t - 2$, temos $U' = 3$, então:

$f(t) = (U)^3$

$f'(t) = 3(U)^2.U' = 3(U)^2.3 = 9U^2$

$f''(t) = 18U.U' = 18U3 = 54U = 54(3t - 2)$ para x = 2, temos:

$f''(2) = 54(3.2 - 2) = 216$

Exemplo 6:

Uma certa espécie de tartaruga está ameaçada de extinção em virtude de comerciantes estarem vendendo ovos com afrodisíaco. Depois que várias medidas de preservação forem implementadas espera-se que a população de tartarugas cresça de acordo com a regra: $N(t) = 2t^3 + 3t$-4t +1000 (0 ≤ t ≤ 10), em que $N(t)$ denota o tamanho da população ao fim do ano t. Calcule $N''(2)$ e $N''(8)$, interpretando os resultados.

Solução: Determinemos $N'(t)$ e $N''(t)$.

$N(t) = 2t^3 + 3t^2 - 4t + 1000$

$N'(t) = 6t^2 + 6t - 4$

$N''(t) = 12t + 6$

Para t = 2, temos:

$N''(2) = 12.2 + 6 = 30$

Para t = 8, temos:

$N''(8) = 12.8 + 6 = 102$

Logo, $N''(2) = 30$ e $N''(8)$=102. Os cálculos revelam que ao final do segundo ano a taxa de crescimento da população de tartaugas aumentará na razão de 30 tartarugas/ano/ano. Ao final do oitavo ano a taxa estará aumentando a uma razão de 102 tartarugas/ano/ano. Assim, as medidas de preservação terão um grande êxito.

Exemplo 7:

Ache todas as derivadas da função f definida por $f(x) = 8x^4 + 5x^3 - x^2 + 7$.

Solução:

$$f'(x) = 32x^3 + 15x^2 - 2x$$
$$f''(x) = 96x^2 + 30x - 2$$
$$f'''(x) = 192x + 30$$
$$f^{(4)}(x) = 192$$
$$f^{(5)}(x) = 0$$
$$f^{(n)}(x) = 0 \qquad n \geqslant 5$$

Observação:

A notação de Leibniz para a derivada primeira é $\frac{dy}{dx}$. Para a derivada segunda de y em relação a x, a notação de Leibniz é $\frac{d^2y}{dx^2}$, porque ela representa $\frac{d}{dx}\left[\frac{d}{dx}(y)\right]$. O símbolo $\frac{d^ny}{dx^n}$ é uma notação para a derivada enésima de y em relação a x.

Outros símbolos para a derivada enésima de f são

$$\frac{d^n}{dx^n}[f(x)] \qquad D_x{}^n[f(x)]$$

Exemplo 8: Calcule $\frac{d^3}{dx^3}\,(2senx + 3cosx - x^3)$.

Solução:

$$\frac{d}{dx}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = 2 \cos x - 3 \text{ sen } x - 3x^2$$
$$\frac{d^2}{dx^2}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \text{ sen } x - 3 \cos x - 6x$$
$$\frac{d^3}{dx^3}(2 \text{ sen } x + 3 \cos x - x^3) = -2 \cos x + 3 \text{ sen } x - 6$$

Observação:

Como $f'(x)$ dá a taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação a x, $f''(x)$, que é a derivada de $f'(x)$, dá a taxa de variação instantânea de $f'(x)$ em relação a x. Além disso, se (x, y) for um ponto qualquer sobre o gráfico de $y = f(x)$, então $\frac{dy}{dx}$ dará a inclinação da reta tangente ao gráfico no ponto (x, y). Assim, $\frac{d^2y}{dx^2}$ será a taxa de variação instantânea da inclinação da reta tangente em relação a x no ponto (x, y).

Exemplo 9:

Seja m(x) a inclinação da reta tangente à curva $y = x^3 - 2x^2 + x$ no ponto (x,y). Ache a taxa de variação instantãnea de m(x) em relaçpão a x no ponto (2,2).

Solução:

$$m(x) = \frac{dy}{dx}$$
$$= 3x^2 - 4x + 1$$

A taxa de variação instantãnea de m(x) em relação a x é dada por m'(x) ou, equivalentemente, por $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$m'(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$$
$$= 6x - 4$$

No ponto (2,2) **,** $\boldsymbol{\frac{d^2y}{dx^2} = 8.}$

Exemplo 10:

Dada $4x^2 + 9y^2 = 36$, ache $\frac{d^2y}{dx^2}$ por derivação implícita.

Solução: Derivando implicitamente em relação a x, obtemos:

$$8x + 18y\frac{dy}{dx} = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{-4x}{9y}$$

Para encontrar $\frac{d^2y}{dx^2}$, calculamos a derivada de um quaociente tendo em mente que y é uma função de x. Assim,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{9y(-4) - (-4x)\left(9 \cdot \frac{dy}{dx}\right)}{81y^2}$$

Substituindo o valor de $\frac{dy}{dx}$ nessa equação, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-36y + (36x)\frac{-4x}{9y}}{81y^2}$$

$$= \frac{-36y^2 - 16x^2}{81y^3}$$

$$= \frac{-4(9y^2 + 4x^2)}{81y^3}$$

Como qualquer valor de x e y satisfazendo essa equação deve também satisfazer a equação original, podemos substituir $9y^2 + 4x^2$ por 36 e obter

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-4(36)}{81y^3}$$

$$= -\frac{16}{9y^3}$$

2.7- Derivadas de Funções Exponenciais e Logarítmicas

2.7.1- Derivada da Função Exponencial

$$\text{Se } y = a^x, \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1) \text{ então}$$

$$y' = a^x \ln a \ (a > 0 \text{ e } a \neq 1).$$

Caso particular:

$$\text{Se } y = e^x \text{ então}$$

$$y' = e^x \cdot \ln e \cdot x' = e^x,$$

onde e é o número neperiano = 2,71828...

Demonstração:

Considerando:

$f(x) = a^x$

Da definição de derivada:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x . a^{\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} a^x . \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Sabendo que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

Portanto:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x . \ln a$$

Está provado que

$f'(x) = a^x . \ln a$

C.q. d.!!

Generalizando:

Quando $a^x = e^x$, temos:

$f'(x) = e^x . \ln e = e^x . 1 = e^x$

2.7.2- Derivada da Função Logarítmica

Se $y = \log_a x \; (a > 0, \; a \neq 1)$, então

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e \quad (a > 0, a \neq 1).$$

Caso particular:

$$\text{Se } y = \ln x \text{ então } y' = \frac{1}{x} \cdot \ln e \quad = \frac{1}{x}.$$

Demonstração:

Considerando:

$f(x) = \log_a x$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x}$$

Aplicando a propriedade da diferença de logaritmos:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\log_a \frac{x + \Delta x}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}$$

O limite Fundamental:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (1 + k.u)^{\frac{1}{u}} = e^k$$

Portanto, temos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \log_a e^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x} \log_a e$$

Invertendo o logaritmo, obtemos:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log_e a}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x.\ln a}$$

Está provado que:

$$f'(x) = \frac{1}{x.\ln a}$$

C.q.d!!!

Generalizando:

$\boldsymbol{f(x) = \ln x}$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln x}{\Delta x}$$

Segue o mesmo raciocínio anterior, resultando:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \ln e = \frac{1}{x}$$

Logo:

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

2.7.3- Derivada da Função Exponencial Composta

Se $y = u^v$, onde $u = u(x)$ e $v = v(x)$ são funções de x, deriváveis num intervalo I e $u(x) > 0, \forall\ x \in$ I então

$$y' = v \cdot u^{v-1} \cdot u' + u^v \cdot \ln u \cdot v'.$$

Exemplos: Calcule a derivada das seguintes funções.

a) $\boldsymbol{y = 3^{2x^2+3x-1}}$

Solução:

Fazendo $u = 2x^2 + 3x - 1$, temos $y = 3^u$. Portanto,

$$\begin{aligned} y' &= 3^u \cdot \ln 3 \cdot u' \\ &= 3^{2x^2 + 3x - 1} \cdot \ln 3 \cdot (4x + 3). \end{aligned}$$

b) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}}$

Solução:

Temos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^u$, onde $u = \sqrt{x}$. Assim,

$$y' = \left(\frac{1}{2}\right)^u \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot u'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{x}} \cdot \ln \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

c) $\boldsymbol{y = e^{\frac{x+1}{x-1}}}$

Solução:

Fazendo $y = e^u$ com $u = \dfrac{x+1}{x-1}$, temos:

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{x+1/x-1} \cdot \frac{(x-1)\cdot 1 - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}$$

$$= e^{x+1/x-1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

d) $\boldsymbol{y = e^{x.lnx}}$

Solução:

Neste caso fazemos

$$y = e^u, \text{ onde } u = x \cdot \ln x.$$

Então,

$$y' = e^u \cdot u'$$

$$= e^{x \cdot \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

$$= e^{x \cdot \ln x}\left[x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 1\right]$$

$$= e^{x \cdot \ln x}(1 + \ln x).$$

e) $\boldsymbol{y = \log_2(3x^2 + 7x - 1)}$

Temos $y = \log_2 u$, onde $u = 3x^2 + 7x - 1$. Portanto,

$$y' = \frac{u'}{u} \cdot \log_2 e.$$

$$= \frac{6x + 7}{3x^2 + 7x - 1} \cdot \log_2 e.$$

f) $\boldsymbol{y = \ln\left(\frac{e^x}{x+1}\right)}$

Solução:

Temos $y = \ln u$, onde $u = \dfrac{e^x}{x + 1}$. Logo,

$$y' = \frac{u'}{u}$$

$$= \frac{\dfrac{(x + 1)e^x - e^x \cdot 1}{(x + 1)^2}}{\dfrac{e^x}{x + 1}} \quad = \frac{x}{x + 1}.$$

g) $f(x) = e^x - x$

Solução:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(e^x - x) = \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(x) = e^x - 1$$

h) $f(x) = ln(senx)$

Solução:

$$\frac{d}{dx}\ln(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} x) = \frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x = \operatorname{cotg} x$$

i) $f(x) = \sqrt{ln\, x}$

Solução:

Dessa vez o logaritmo é a função de dentro; logo, a Regra da Cadeia dá

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}(\ln x)^{-1/2}\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$$

j) $f(x) = ln\, \frac{x+1}{\sqrt{x-2}}$

Solução 1:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} &= \frac{1}{\dfrac{x+1}{\sqrt{x-2}}}\frac{d}{dx}\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} \\ &= \frac{\sqrt{x-2}}{x+1}\,\frac{\sqrt{x-2}\cdot 1 - (x+1)\left(\frac{1}{2}\right)(x-2)^{-1/2}}{x-2} \\ &= \frac{x-2-\frac{1}{2}(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{x-5}{2(x+1)(x-2)}\end{aligned}$$

Solução 2:

Se primeiro simplificarmos a função dada usando as leis do logaritmo, então a diferenciação ficará mais fácil:

$$\frac{d}{dx}\ln\frac{x+1}{\sqrt{x-2}} = \frac{d}{dx}\left[\ln(x+1) - \tfrac{1}{2}\ln(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

(Essa resposta pode ser deixada assim, mas se usássemos um denominador comum obteríamos a mesma resposta da solução 1).

k) $\boldsymbol{y = ln\,(\,x^3 + 1)}$

Solução:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} = \frac{1}{x^3+1}\cdot\left(3x^2\right) = \frac{3x^2}{x^3+1}$$

l) $h(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}$

Solução:

Usando a regra do quociente, seguida da Regra da Cadeia, teremos:

$$h'(x) = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)\frac{d}{dx}\left(e^x\right) - e^x\frac{d}{dx}\left(e^x + e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} = \frac{\left(e^x + e^{-x}\right)e^x - e^x\left(e^x - e^{-x}\right)}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + 1 - e^{2x} + 1}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2} \qquad \left(e^0 = 1\right)$$

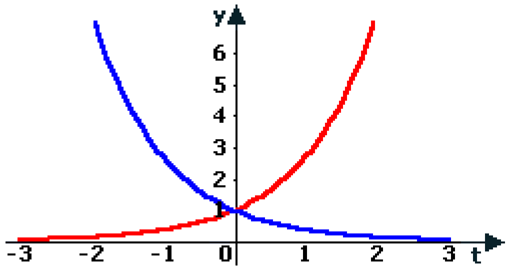
$$= \frac{2}{\left(e^x + e^{-x}\right)^2}$$

2.8 – Derivadas das Funções Hiperbólicas

2.8.1 – Funções Exponenciais Reais

A função exponencial é uma das mais importantes da Matemática. Esta função é definida por $f:R \to R$ através de $f(t) = \exp(t) = e^t$.

No plano R², podemos obter a reflexão do gráfico desta função em relação ao eixo OY, que nos dá outra função exponencial $g:R \to R$ definida por $g(t) = \exp(-t) = e^{-t}$. Os gráficos dessas funções podem ser vistos abaixo. Observamos que tais funções são positivas. $f(t)=e^t$ (cor vermelha) é crescente e $g(t)=e^{-t}$ (cor azul) é decrescente.



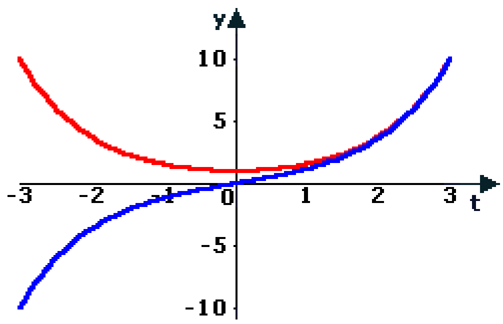
Com essas funções, definimos outras funções da Matemática bastante utilizadas nas ciências em geral, inclusive na própria Matemática.

2.8.2 – Seno Hiperbólico e Cosseno Hiperbólico

As funções seno hiperbólico e cosseno hiperbólico, são definidas, respectivamente, por:

$$\sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \quad \text{e} \quad \cosh(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

A função cosh é positiva, enquanto que senh é positiva para parâmetros positivos reais, negativos para parâmetros negativos reais e se anula em t=0.



Com essas duas funções cosh (cor vermelha) e senh (cor azul), também podemos definir outras funções da Matemática.

2.8.3 – Tangente, Cotangente, Secante e Cossecante Hiperbólicas

As funções tangente, cotangente, secante e cossecante hiperbólicas, são respectivamente definidas por

$$tgh(t) = \frac{senh(t)}{\cosh(t)}$$

$$cotgh(t) = \frac{cosh(t)}{\mathrm{senh}(t)}$$

$$sech(t) = \frac{1}{\cosh(t)}$$

$$cossech(t) = \frac{1}{\mathrm{senh}(t)}$$

quando os denominadores são diferentes de zero.

2.8.4 – Relação Fundamental da Trigonometria Hiperbólica

Ao tomar a diferença dos quadrados das funções cosh e senh, obtemos

$$\cosh^2(t)-\mathrm{senh}^2(t)=[½(e^t+e^t)]^2-[½(e^t+e^t)]^2.$$

Efetuando as operações temos que $\cosh^2(t) - \mathrm{senh}^2(t) = 1$, que é uma relação notável na Trigonometria hiperbólica.

A construção da trigonometria circular é realizada sobre uma circunferência de raio unitário, dada por $x^2 + y^2 = 1$.

Tomando $x = \cos(t)$ e $y= \mathrm{sen}(t)$, observamos a relação fundamental da trigonometria circular: $\cos^2(t) + \mathrm{sen}^2(t) = 1$, onde t é o ângulo (tomado em radianos).

Na construção da trigonometria hiperbólica, usamos uma curva denominada hipérbole, representada por $x^2 - y^2 = 1$. Tomando $x = \cosh(t)$ e $y=\mathrm{senh}(t)$, observamos a relação fundamental da trigonometria hiperbólica: $\cosh^2(t) - \mathrm{senh}^2(t) = 1$, onde t é um parâmetro real que pode ser interpretado geometricamente.

Praticamente todas as propriedades da trigonometria circular podem ser transladadas para a trigonometria hiperbólica, com o cuidado de observar muitas vezes a troca do sinal de "+" pelo sinal de "-".

Trigonometria circular	Trigonometria hiperbólica
$x^2 + y^2 = 1$	$x^2 - y^2 = 1$
$\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) = 1$	$\cosh^2(t) - \text{senh}^2(t) = 1$
$\text{tg}(t) = \text{sen}(t)/\cos(t)$	$\text{tgh}(t) = \text{senh}(t)/\cosh(t)$
$\cot(t) = \cos(t)/\text{sen}(t)$	$\coth(t) = \cosh(t)/\text{senh}(t)$
$\sec(t) = 1/\cos(t)$	$\text{sech}(t) = 1/\cosh(t)$
$\csc(t) = 1/\text{sen}(t)$	$\text{csch}(t) = 1/\text{senh}(t)$
$\text{sen}(2t)=2\text{sen}(t)\cos(t)$	$\text{senh}(2t)=2\text{senh}(t)\cosh(t)$
$\cos(2t)=\cos^2(t)-\text{sen}^2(t)$	$\cosh(2t)=\cosh^2(t)+\text{senh}^2(t)$
$\text{tg}(2t)=2\text{tg}(t)/(1-\text{tg}^2(t))$	$\text{tgh}(2t)=2\text{tgh}(t)/(1+\text{tgh}^2(t))$

Para as derivadas, temos a tabela:

Trigonometria circular		Trigonometria hiperbólica	
Função	Derivada	Função	Derivada
$\text{sen}(t)$	$\cos(t)$	$\text{senh}(t)$	$\cosh(t)$
$\cos(t)$	$-\text{sen}(t)$	$\cosh(t)$	$\text{senh}(t)$
$\text{tg}(t)$	$\sec^2(t)$	$\text{tgh}(t)$	$\text{sech}^2(t)$

2.8.4 – Funções Inversas da Trigonometria Hiperbólica

É possível definir a função inversa de cosh, que será identificada por arccosh, assim como de todas as outras funções trigonométricas hiperbólicas. Se cosh(u)=t, obteremos o valor de u em função de t, denotando-o por qualquer uma das duas formas abaixo:

$$u = \text{arccosh}(t) = \cosh^{-1}(t)$$

Pela definição dada na parte inicial desta página, segue que:

$$t = \cosh(u) = ½(e^u + e^{-u})$$

Logo:

$$2t = e^u + 1/e^u.$$

Tomando $e^u=x$, obteremos $2t=x+1/x$, ou seja, $x^2-2tx+1=0$. Resolvendo esta equação do segundo grau em x e usando a notação R[z] para a raiz quadrada de $z\geq0$, obteremos:

$$e^u = x = t + R[t^2-1]$$

Aplicando o logaritmo natural a ambos os membros dessa igualdade, obtemos:

u = log(t+R[t²-1])

Assim, a função inversa de cosh é a função definida por:

arccosh(t) = $\cosh^{-1}$(t) = log(t + R[t²-1])

2.8.5 – Demonstrações: Derivadas de Funções Hiperbólicas

- $\left[\operatorname{senh}(x)\right]' = \cosh(x)$

$$\left[\operatorname{senh}(x)\right]' = \left[\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^{x}-e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{x}-e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

- $\left[\cosh(x)\right]' = \operatorname{senh}(x)$

$$\left[\cosh(x)\right]' = \left[\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}\right]' = \frac{1}{2}\left[e^{x}+e^{-x}\right]' = \frac{1}{2}\left(e^{x}+e^{-x}\cdot(-1)\right) = \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} = \operatorname{senh}(x)$$

- $\left[\tanh(x)\right]' = \operatorname{sech}^{2}(x)$

$$\left[\tanh(x)\right]' = \left[\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}\right]' = \frac{\left[\operatorname{senh}(x)\right]'\cosh(x)-\operatorname{senh}(x)\left[\cosh(x)\right]'}{\cosh^{2}(x)} =$$

$$= \frac{\cosh(x)\cdot\cosh(x)-\operatorname{senh}(x)\cdot\operatorname{senh}(x)}{\cosh^{2}(x)} = \frac{\cosh^{2}(x)-\operatorname{senh}^{2}(x)}{\cosh^{2}(x)} = \frac{1}{\cosh^{2}(x)} = \operatorname{sech}^{2}(x)$$

- $\left[\coth(x)\right]' = -\operatorname{csch}^{2}(x)$

$$\left[\coth(x)\right]' = \left[\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)}\right]' = \frac{\left[\cosh(x)\right]'\operatorname{senh}(x)-\cosh(x)\left[\operatorname{senh}(x)\right]'}{\operatorname{senh}^{2}(x)} =$$

$$= \frac{\operatorname{senh}(x)\cdot\operatorname{senh}(x)-\cosh(x)\cdot\cosh(x)}{\operatorname{senh}^{2}(x)} = -\frac{\cosh^{2}(x)-\operatorname{senh}^{2}(x)}{\operatorname{senh}^{2}(x)} = -\frac{1}{\operatorname{senh}^{2}(x)} = -\operatorname{csch}^{2}(x)$$

- $\left[\operatorname{sech}(x)\right]' = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$

$$\left[\operatorname{sech}(x)\right]' = \left[\frac{1}{\cosh(x)}\right]' = \left[\left(\cosh(x)\right)^{-1}\right]' = -\left(\cosh(x)\right)^{-2}\cdot\left[\cosh(x)\right]' = -\left(\cosh(x)\right)^{-2}\cdot\operatorname{senh}(x) =$$

$$= -\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh^{2}(x)} = -\frac{1}{\cosh(x)}\cdot\frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)} = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$$

- $\left[\operatorname{csch}(x)\right]' = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$

$$\left[\operatorname{csch}(x)\right]' = \left[\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\right]' = \frac{[1]'\operatorname{senh}(x)-1\cdot\left[\operatorname{senh}(x)\right]'}{\operatorname{senh}^{2}(x)} = \frac{0\cdot\operatorname{senh}(x)-1\cdot\cosh(x)}{\operatorname{senh}^{2}(x)} =$$

$$= \frac{-\cosh(x)}{\operatorname{senh}^{2}(x)} = -\frac{1}{\operatorname{senh}(x)}\frac{\cosh(x)}{\operatorname{senh}(x)} = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)$$

Se u é uma função diferenciável, então, pela regra da cadeia:

- $\left[\operatorname{senh}(u(x))\right]' = \cosh(x)\, u'(x)$
- $\left[\cosh(u(x))\right]' = \operatorname{senh}(x)\, u'(x)$
- $\left[\tanh(u(x))\right]' = \operatorname{sech}^2(x)\, u'(x)$
- $\left[\coth(u(x))\right]' = -\operatorname{csch}^2(x)\, u'(x)$
- $\left[\operatorname{sech}(u(x))\right]' = -\operatorname{sech}(x)\tanh(x)\, u'(x)$
- $\left[\operatorname{csch}(u(x))\right]' = -\operatorname{csch}(x)\coth(x)\, u'(x)$

Exercícios Resolvidos

1) Encontre a derivada das seguintes funções:

(a) $f(x) = \dfrac{1+\operatorname{senh}(3x)}{1+\cosh(3x)}$

$$f'(x) = \left[\frac{1+\operatorname{senh}(3x)}{1+\cosh(3x)}\right]' = \frac{\left[1+\operatorname{senh}(3x)\right]'\left(1+\cosh(3x)\right) - \left(1+\operatorname{senh}(3x)\right)\left[1+\cosh(3x)\right]'}{\left(1+\cosh(3x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(0+\cosh(3x)\left[3x\right]'\right)\left(1+\cosh(3x)\right) - \left(1+\operatorname{senh}(3x)\right)\left(0+\operatorname{senh}(3x)\left[3x\right]'\right)}{\left(1+\cosh(3x)\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\cosh(3x)\cdot 3\right)\left(1+\cosh(3x)\right) - \left(1+\operatorname{senh}(3x)\right)\left(\operatorname{senh}(3x)\cdot 3\right)}{\left(1+\cosh(3x)\right)^2} =$$

$$= \frac{3\left(\cosh(3x)+\cosh^2(3x)-\operatorname{senh}(3x)-\operatorname{senh}^2(3x)\right)}{\left(1+\cosh(3x)\right)^2} = \boldsymbol{\frac{3\left(\cosh(3x)-\operatorname{senh}(3x)+1\right)}{\left(1+\cosh(3x)\right)^2}}$$

(b) $f(x) = \tanh^4\left(x^2\right) - \operatorname{sech}^3\left(x^2\right)$

$$f'(x) = \left[\tanh^4\left(x^2\right) - \operatorname{sech}^3\left(x^2\right)\right]' = 4\tanh^3\left(x^2\right)\left[\tanh\left(x^2\right)\right]' - 3\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)\left[\operatorname{sech}\left(x^2\right)\right]' =$$

$$= 4\tanh^3\left(x^2\right)\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)\left[x^2\right]' - 3\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)\left(-\operatorname{sech}\left(x^2\right)\tanh\left(x^2\right)\right)\left[x^2\right]' =$$

$$= 4\tanh^3\left(x^2\right)\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)2x + 3\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)\operatorname{sech}\left(x^2\right)\tanh\left(x^2\right)2x =$$

$$= 8x\tanh^3\left(x^2\right)\operatorname{sech}^2\left(x^2\right) + 6x\operatorname{sech}^3\left(x^2\right)\tanh\left(x^2\right) =$$

$$= \boldsymbol{2x\tanh\left(x^2\right)\operatorname{sech}^2\left(x^2\right)\left(4\tanh^2\left(x^2\right)+3\operatorname{sech}\left(x^2\right)\right)}$$

2.9 - Taxas Relacionadas

Problemas envolvendo taxas de variação de variáveis relacionadas são chamados de problemas de taxas relacionadas.

Exemplos:

1) Uma escada com 25 unidades de comprimento está apoiada numa parede vertical. Se o pé da escada for puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, qual a velocidade com que a escada está deslizando, quando seu pé está a 15 unidades de comprimento da parede?

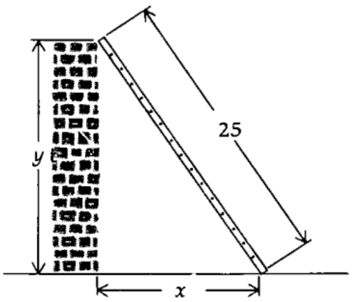


FIGURA 1

Solução Seja t o tempo decorrido desde que a escada começou a deslizar pela parede, y a distância do chão ao topo da escada em t s e x a distância do pé da escada até a parede em t s. Veja a Figura 1.

Como o pé da escada está sendo puxado horizontalmente, afastando-se da parede a 3 unidades de comprimento por segundo, $\dfrac{dx}{dt} = 3$. Queremos encontrar $\dfrac{dy}{dt}$ quando $x = 15$. Pelo teorema de Pitágoras,

$$y^2 = 625 - x^2 \tag{1}$$

Como x e y são funções de t, derivamos ambos os lados de (1) em relação a t e obtemos

$$2y\frac{dy}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 15$, segue de (1) que $y = 20$. Como $\frac{dx}{dt} = 3$, obtemos de (2)

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=20} = -\tfrac{15}{20} \cdot 3$$
$$= -\tfrac{9}{4}$$

Logo, o topo da escada está deslizando pela parede a uma taxa de $2\frac{1}{4}$ unidades de comprimento por segundo, quando o pé está a 15 unidades de comprimento da parede. O sinal *menos* significa que y é decrescente, quando t cresce.

Em problemas com taxas relacionadas, as variáveis têm uma relação específica para os valores de t, onde t é a medida do tempo. Essa relação é usualmente expressa na forma de uma equação, como a equação (1) no Exemplo 1. Os valores das variáveis e as taxas de variação das variáveis em relação a t são freqüentemente dados num determinado instante. No Exemplo 1, no instante em que $x = 15$, então $y = 20$ e $\frac{dx}{dt} = 3$ e queremos encontrar $\frac{dy}{dt}$.

Antes de apresentar mais explicações, damos outro exemplo para demonstrar o cálculo envolvido.

2) Dada x cos y = 5, em que x e y são funções de terceira variável t. Se $\frac{dx}{dt} = -4$, ache $\frac{dy}{dt}$, sabendo que $y = \frac{1}{3}\pi$.

Solução Derivando ambos os lados da equação, obtemos

$$(\cos y)\frac{dx}{dt} - (x \operatorname{sen} y)\frac{dy}{dt} = 0$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{\cos y}{x \operatorname{sen} y} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Da equação dada, quando $y = \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$. De (3), com $y\ \frac{1}{3}\pi$, $x = 10$, e $\frac{dx}{dt} = -4$,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right]_{y=\pi/3} = \frac{\frac{1}{2}}{10(\frac{1}{2}\sqrt{3})}(-4)$$
$$= -\tfrac{2}{15}\sqrt{3}$$

Os passos a seguir representam um procedimento possível para resolver problemas envolvendo taxas relacionadas.

1. Faça uma figura, se isso for possível.
2. Defina as variáveis. Em geral defina primeiro t, pois as outras variáveis usualmente dependem de t.
3. Escreva todos os fatos numéricos conhecidos sobre as variáveis e suas derivadas em relação a t.
4. Obtenha uma equação envolvendo as variáveis que dependem de t.
5. Derive em relação a t ambos os membros da equação encontrada na etapa 4.
6. Substitua os valores de quantidades conhecidas na equação da etapa 5 e resolva em termos da quantidade desejada.

3) Um tanque tem a forma de um cone invertido com 16 m de altura e uma base com 4m de raio. A água "flui" no tanque a uma taxa de 2 m³/min. Com que velocidade o nível da água estará se elevando quando sua profundidade for de 5m?

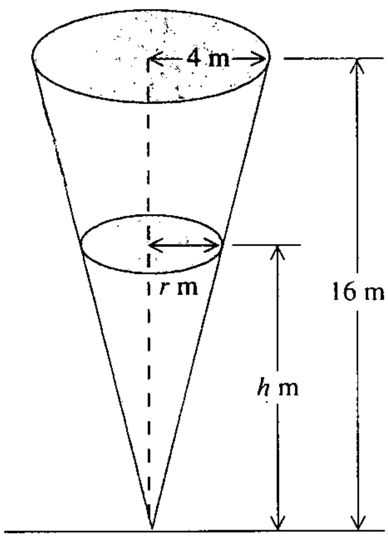


FIGURA 2

Solução Seja t o tempo medido em minutos decorridos desde que a água começou a fluir dentro do tanque; h a altura em metros do nível de água em t min; r a medida em metros do raio da superfície da água em t min; e V a medida, em metros cúbicos, do volume de água no tanque em t min.

Em qualquer instante, o volume de água no tanque pode ser expresso em termos do volume do cone. Veja a Figura 2.

$$V = \tfrac{1}{3}\pi r^2 h \qquad (4)$$

V, r e h são todas funções de t. Como a água está fluindo no tanque a uma taxa de 2 m^3/min, $\dfrac{dV}{dt} = 2$. Queremos encontar $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 5$. Para expressar r em termos de h, temos, dos triângulos semelhantes,

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{16} \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{4}h$$

Substituindo esse valor de r em (4), obtemos

$$V = \tfrac{1}{3}\pi(\tfrac{1}{4}h)^2(h) \quad \Leftrightarrow \quad V = \tfrac{1}{48}\pi h^3$$

Por derivação de ambos os lados dessa equação em relação a t,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{16}\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\dfrac{dV}{dt}$ por 2 e resolvendo em $\dfrac{dh}{dt}$, obtemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{32}{\pi h^2}$$

Logo,

$$\left.\frac{dh}{dt}\right]_{h=5} = \frac{32}{25\pi}$$

Assim sendo, o nível de água está subindo a uma taxa de $\dfrac{32}{25\pi}$ m/min quando a profundidade da água é de 5 m.

4) Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

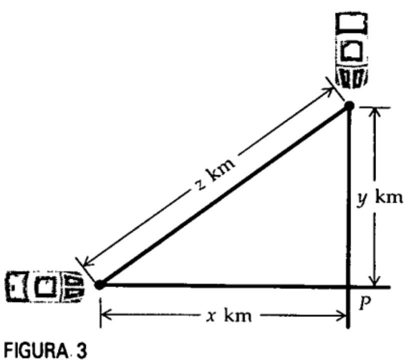


FIGURA 3

EXEMPLO 4 Dois carros estão se encaminhando em direção a um cruzamento, um seguindo a direção leste a uma velocidade de 90 km/h e o outro seguindo a direção sul, a 60 km/h. Qual a taxa segundo a qual eles se aproximam um do outro no instante em que o primeiro carro está a 0,2 km do cruzamento e o segundo a 0,15 km?

Solução Consulte a Figura 3, onde o ponto P é o cruzamento das duas estradas. Seja t h o tempo decorrido desde que os carros começaram a se aproximar de P, x km a distância do primeiro carro em t h, y km a do segundo carro em t h e z km a distância entre os dois carros em t h. Como o primeiro carro aproxima-se de P a uma taxa de 90 km/h e x está decrescendo enquanto t está crescendo, $\frac{dx}{dt} = -90$. Da mesma forma, $\frac{dy}{dt} = -60$. Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$ quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$. Do teorema de Pitágoras,

$$z^2 = x^2 + y^2 \tag{5}$$

Derivando ambos os membros dessa equação em relação a t, obtemos

$$2z\frac{dz}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}}{z} \tag{6}$$

Quando $x = 0{,}2$ e $y = 0{,}15$, segue de (5) que $z = 0{,}25$. Em (6), seja $\frac{dx}{dt} = -90$, $\frac{dy}{dt} = -60$, $x = 0{,}2$, $y = 0{,}15$ e $z = 0{,}25$, então obtemos

$$\left.\frac{dz}{dt}\right]_{z=0{,}25} = \frac{(0{,}2)(-90) + (0{,}15)(-60)}{0{,}25}$$
$$= -108$$

Logo, no instante em questão os carros estão se aproximando um do outro a uma taxa de 108 km/h.

5) Suponha que, em certo mercado, x milhares de caixas de laranja sejam fornecidos diariamente sendo p o preço por caixa e a equação de oferta $px - 20p - 3x + 105 = 0$. Se o fornecimento diário estiver decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, com que taxa estarão variando o fornecimento diário for de 5000 caixas?

Solução Seja t o tempo decorrido medido em dias, desde que o suprimento diário de laranjas começou a decrescer. Então, p e x são ambas funções de t. Como o fornecimento diário está decrescendo a uma taxa de 250 caixas por dia, $\frac{dx}{dt} = -\frac{250}{1000}$, isto é, $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$. Queremos encontrar $\frac{dp}{dt}$ quando $x = 5$.

Da equação de oferta dada, derivamos implicitamente em relação a t e obtemos

$$p\frac{dx}{dt} + x\frac{dp}{dt} - 20\frac{dp}{dt} - 3\frac{dx}{dt} = 0$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{3-p}{x-20}\cdot\frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 5$, segue da equação de oferta que $p = 6$. Como $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{4}$, temos da equação precedente

$$\left.\frac{dp}{dt}\right]_{p=6} = \frac{3-6}{5-20}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{20}$$

Assim, o preço de uma caixa de laranja estará decrescendo a uma taxa de \$ 0,05 por dia, quando o fornecimento diário for de 5.000 caixas.

6) Um avião voa a 152,4 m/s paralelamente ao solo, a uma altitude de 1220 m no sentido oeste, tomando como referência um holofote fixado no solo que o focaliza e que se encontra à esquerda da projeção vertical do avião em relação ao solo. Sabendo-se que a luz do holofote deverá permanecer iluminando o avião, qual deverá ser a velocidade angular (de giro) do holofote, no instante em que a distância horizontal entre ele e a projeção vertical do avião for 610 m?

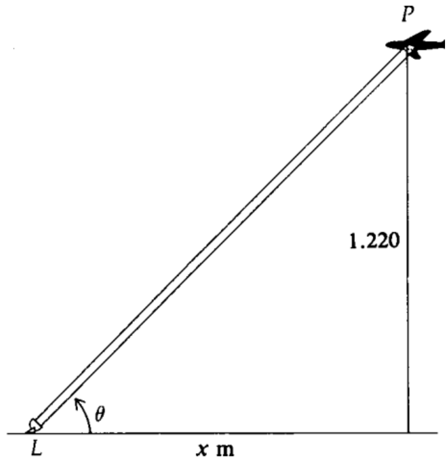


FIGURA 4

Solução Observe a Figura 4. O holofote está no ponto L e num determinado instante o avião está no ponto P. Seja x a distância (em metros) medida horizontalmente entre o holofote e a projeção vertical do avião em relação ao solo, e θ o ângulo de elevação (em radianos) do feixe luminoso emitido pelo holofote em relação ao solo, neste mesmo instante.

Temos $\frac{dx}{dt} = -152{,}4$ e queremos encontrar $\frac{d\theta}{dt}$ quando $x = 610$.

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1.220}{x}$$

Derivando membro a membro em relação a t, obtemos

$$\sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1.220}{x^2} \frac{dx}{dt}$$

Substituindo $\frac{dx}{dt} = -152{,}4$ na relação acima e dividindo por $\sec^2 \theta$, iremos obter

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{x^2 \sec^2 \theta} \qquad (7)$$

Quando $x = 610$, $\operatorname{tg} \theta = 2$. Como $\sec^2 \theta = 1 + \operatorname{tg}^2 \theta$, $\sec^2 \theta = 5$. Substituindo esses valores em (7) temos, quando $x = 610$,

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{185.928}{610^2 \cdot 5} = \frac{1}{10}$$

Concluímos, então, que no instante dado a medida do ângulo está aumentando a uma taxa de $\frac{1}{10}$rad/s e essa é a velocidade com que o holofote está girando.

Advertência: Um erro comum nesses tipos de problemas é substituir a informação numérica para as grandezas que variam com o tempo precocemente. Isso deve ser feito somente após a diferenciação.

2.10 - Aproximações Lineares e Diferenciais

A seguir teremos uma aplicação da derivada que consiste em estimar o valor de uma função $f(x)$ próximo a um ponto x_0 usando a reta tangente ao gráfico de f passando por x_0.

Se a função f é derivável em x_0 então a reta tangente ao gráfico de f passando por $(x_0, f(x_0))$ é a reta $y = L(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

A aproximação linear consiste em estimar o valor de $f(x)$, para x próximo x_0. de usando o valor de $y = L(x)$. Observe figura 1 a seguir:

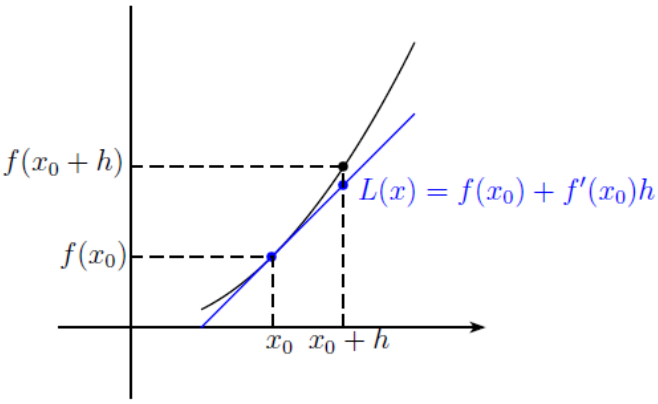


Figura 1: Aproximação Linear de f

Como a função f é derivável em x_0 então

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=f'(x_0)$$

Se

$$R=R(h)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)$$

então

$$f(x_0+h)-f(x_0)=\left(f'(x_0)+R(h)\right)h=f'(x_0)h+R(h)h$$

(I)

E como a função f é derivável em x_0

$$\lim_{h\to 0}R(h)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}-f'(x_0)=f'(x_0)-f'(x_0)=0$$

Abandonando o termo R(H)h na equação (I), obtemos

$$f(x_0+h)-f(x_0)\approx f'(x_0)h$$

ou, escrevendo

$$\Delta f=f(x_0+h)-f(x_0) \text{ e } \Delta x=(x_0+h)-x_0=h$$

$$\Delta f\approx f'(x_0)\Delta x$$

Observação:

Para calcular por aproximação linear o valor de $f(x_0 + \Delta x)$, usamos a aproximação $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\,\Delta x$. Quanto menor Δx, melhor será a aproximação.

Exemplos:

a) Calcule o valor aproximado de $\sqrt{102}$. Se $f(x) = \sqrt{x}$, então sabemos que $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Tomando $x_0 = 100$ e $\Delta x = 2$, teremos

$$f(100 + \Delta x) \approx f(100) + f'(100)\Delta x$$
$$\sqrt{102} \approx \sqrt{100} + \frac{1}{2\sqrt{100}} \cdot 2 = 10{,}1$$

O valor correto até a 4^a casa decimal é 10,0995, o que mostra que a aproximação está correta até a 3^a casa decimal.

b) Use aproximação linear para estimar o valor de $\sqrt[3]{65}$.

Como $\sqrt[3]{64} = 4$, faremos a aproximação linear em torno de $x_0 = 4$.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} \implies f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}.$$

Assim,

$$f(65) \approx f(64) + f'(64) \cdot 1 = \sqrt[3]{64} + \frac{1}{3}64^{-2/3} = 4 + \frac{1}{48} = 4.021$$

c) Se $y = x^3 + x + 1$, use a aproximação linear para determinar a variação de y quando x passa de 3 para 3,05.

Temos $\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x$. Usando a derivada $f'(x) = 3x^2 + 1$ e fazendo $x_0 = 3$ e $\Delta x = 0,05$,obtemos:

$$\Delta f \approx (3 \cdot 3^2 + 1) \cdot 0{,}05 = 1{,}4$$

As ideias referentes às aproximações lineares são algumas vezes formuladas na terminologia e notação de diferenciais. Se $y = f(x)$, em que f é uma função diferenciável, então a diferencial dx é uma variável independente; isto é, a dx pode ser atribuído um valor qualquer. A diferencial dy é então definida em termos de dx pela equação $dy = f'(x)dx$.

Dessa forma dy é uma variável dependente; ela depende dos valores de x e dx. Se a dx for atribuído um valor específico e x for algum número específico no domínio de f, então o valor numérico de dy está determinado.

O significado geométrico de diferenciais pode ser observado na figura 2 abaixo. Seja $P(x, f(x))$ e $Q(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ pontos sobre o gráfico de f e façamos $dx = \Delta x$. A variação correspondente em y é $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

A inclinação da reta PR é a derivada $f'(x)$. Assim, a distância direta de S a R é $f'(x)dx = dy$. Consequentemente, dy representa a distância que a reta tangente sobe ou desce (a variação na linearização), enquanto é Δy representa a distância que a curva $y = f(x)$ sobe ou desce quando x varia por uma quantidade dx.

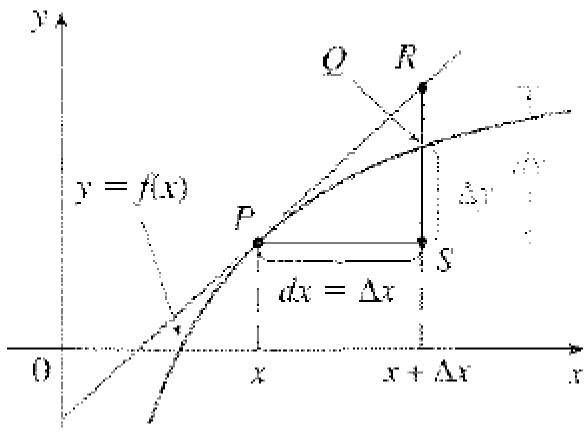


Figura 2

Exemplos:

d) Compare os valores de Δy e dy se $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ e x variar

i) de 2 para 2,05.

Solução:

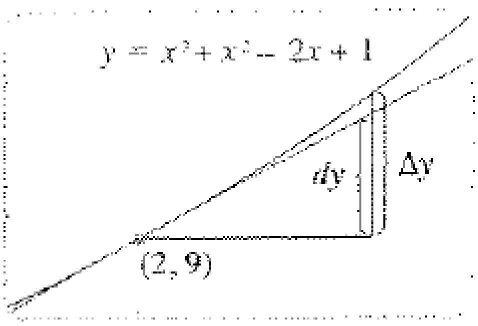


Figura 3

Temos que

f(2) = $2^3 + 2^2 - 2(2) + 1 = 9$

f(2,05) = $(2{,}05)^3 + (2{,}05)^2 - 2(2{,}05) + 1 = 9{,}717625$

$\Delta y = f(2{,}05) - f(2) = 0{,}717625$

Em geral, $dy = f'(x)dx = (3x^2 + 2x - 2)$dx

Quando x = 2 e $dx = \Delta x = 0{,}05$, temos

$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}05 = 0{,}7$

Solução:

ii) de 2 para 2,01.

f(2,01) = $(2{,}01)^3 + (2{,}01^2 - 2(2{,}01) + 1 = 9{,}140701$

$\Delta y = f(2{,}01) - f(2) = 0{,}140701$

Quando $dx = \Delta x = 0{,}01$, temos

$dy = [3(2)^2 + 2(2) - 2]0{,}01 = 0{,}14$

Observe que no exemplo anterior a aproximação $\Delta y \approx dy$ torna-se melhor à medida que Δx fica menor. Além disso, é muito mais fácil computar dy do que aproximação Δy. Para funções mais complicadas pode ser impossível computar exatamente m aproximação Δy. Em tais casos a aproximação por diferenciais é especialmente proveitosa.

e) Encontre a linearização da função $f(x) = \sqrt{x+3}$ em x_0 = 1 e use-a para aproximar os números $\sqrt{3{,}98}$ e $\sqrt{4{,}05}$. Essas aproximações estão superestimadas ou subestimadas?

Solução

A derivada de $f(x) = \sqrt{x+3} = (x+3)^{\frac{1}{2}}$ é $f'(x) = \frac{1}{2}(x+3)^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x+3}}$ e assim temos $f(1) = 2$ e $f'(1) = \frac{1}{4}$.

$\mathrm{L(x)} = \mathrm{f}(1) + \mathrm{f}'(1)(\mathrm{x} - 1) = 2 + \frac{1}{4}(\mathrm{x} - 1) = \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$

A aproximação linear correspondente é $\sqrt{x+3} \approx \frac{7}{4} + \frac{x}{4}$.

Em particular, temos $\sqrt{3{,}98} \approx \frac{7}{4} + \frac{0{,}98}{4} = 1{,}995$ e $\sqrt{4{,}05} \approx \frac{7}{4} + \frac{1{,}05}{4} = 2{,}0125$

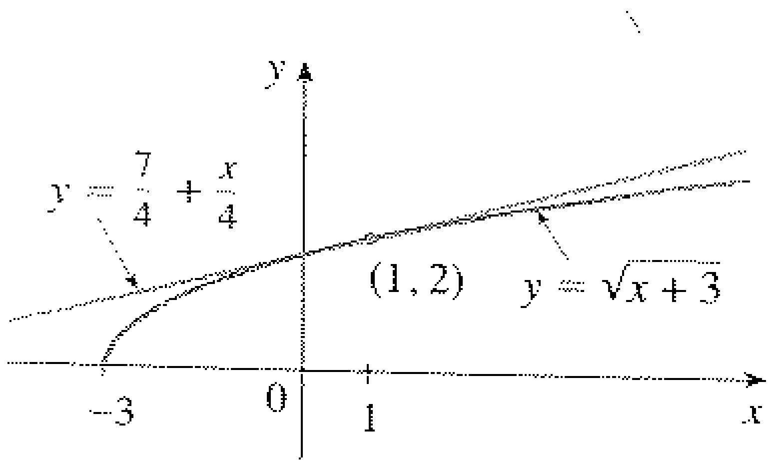


Figura 4

A aproximação linear está ilustrada na figura 4. Observa-se que, realmente, a aproximação pela reta tangente é uma boa aproximação para a função dada quando x está próximo de 1. Nota-se também que essas aproximações são superestimadas, pois a reta tangente está acima da curva.

Na notação de diferenciais, a aproximação linear pode ser escrita como $f(x_0 + dx) \approx f(x_0) + dy$. Para a função $f(x) = \sqrt{x+3}$, temos:

$dy = f'(x)dx = \frac{dx}{2\sqrt{x+3}}$.

Se $x_0 = 1$ e $dx = \Delta x = 0{,}05$, então $dy = \frac{0{,}05}{2\sqrt{1+3}} = 0{,}0125$ e $\sqrt{4{,}05} = f(1{,}05) \approx f(1) + dy = 2{,}0125$ exatamente como encontrado nos cálculos anteriores.

f) O raio de uma esfera tem 21 cm, com um erro de medida possível de no máximo 0,05 cm. Qual é o erro máximo cometido ao usar esse valor de raio para computar o volume da esfera?

Solução:

Se o raio da esfera for r , então seu volume é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. Se o erro na medida do valor de r for denotado por $dr = \Delta r$, então o erro correspondente no cálculo do valor de V é ΔV, que pode ser aproximado pela diferencial $dV = 4\pi r^2 dr$. Quando $r = 21$ e $dr = 0{,}05$, temos $dV = 4\pi(21)^2 . 0{,}05 \approx 277$. O erro máximo no volume calculado é de cerca de 277 cm³.

Embora o erro possível possa parecer muito grande, uma ideia melhor dele é dada pelo erro relativo, que é computado dividindo-se o erro pelo volume total: $\frac{\Delta V}{V} \approx \frac{dV}{V} = \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi r^3} = 3\frac{dr}{r}$. Assim, o erro relativo no volume é cerca de três vezes o erro relativo no raio. Nesse exemplo, o erro relativo no raio é aproximadamente $\frac{dr}{r} = \frac{0,05}{21} \approx 0,0024$ e produz um erro relativo de cerca de 0,007 no volume. Os erros também podem ser expressos como erros percentuais de 0,24% no raio e 0,7% no volume. Esse exemplo ilustra o uso de diferenciais na estimativa de erros que ocorrem em razão de medidas aproximadas.

Unidade 3- Aplicações da Diferenciação

3.1- Reta Tangente

A interpretação geométrica da derivada de uma função é a inclinação da reta tangente ao gráfico da função em um ponto. Esse fato possibilita-nos aplicar derivadas como recurso auxiliar no esboço de gráfico. Por exemplo, podemos usar a derivada para determinar os pontos onde a reta tangente é horizontal; esses são os pontos em que a derivada é zero. A derivada também pode ser usada para encontrarmos os intervalos nos quais a função está acima ou abaixo da reta tangente.

A reta tangente a y = f(x) em (a, f(a)) é a reta que passa em (a, f(a)), cuja inclinação é igual a f'(a), a derivada de f em a.

Logo, se usarmos a fórmula da equação de uma reta, vista em geometria analítica, poderemos escrever uma equação da reta tangente à curva y = f(x) no ponto (a, f(a)): y – f(a) = f'(a)(x – a).

Exemplo:

a) Encontre uma equação da reta tangente a parábola y = x^2 – 8x + 9 no ponto (3, – 6).

Solução:

Temos que a derivada de f(x) = x^2 – 8x + 9 em a é f'(a) = 2a – 8. Logo, a inclinação da reta tangente em (3, – 6) é f'(3) = 2(3) – 8 = –2. Assim, uma equação da reta tangente, como ilustrado na figura 1,abaixo, é:

y – (–6) = (–2)(x – 3) ou y = –2x

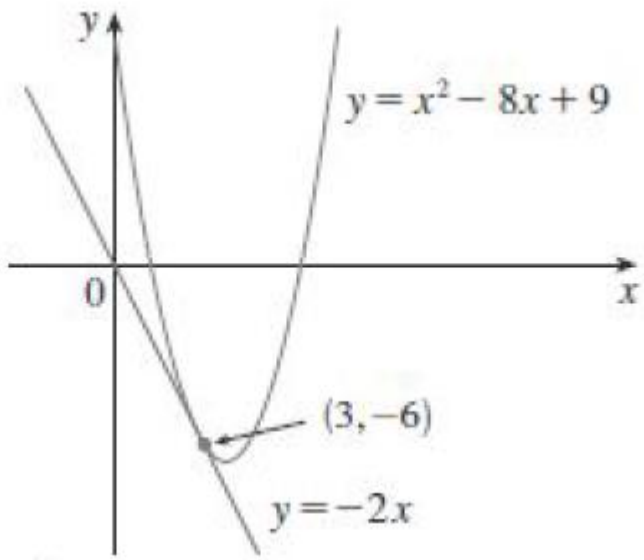


Figura 1

3.2- Velocidades

Suponha um objeto movendo-se sobre uma linha reta de acordo com a equação s = f(t), em que s é o deslocamento do objeto a partir da origem no instante t. A função f que descreve o movimento é chamada de função posição do objeto. No intervalo de tempo t = a e t = a + h a variação na posição será de f(a + h) – f(a),ver figura 2. A velocidade média nesse intervalo é

$$velocidade\ média = \frac{deslocamento}{tempo} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

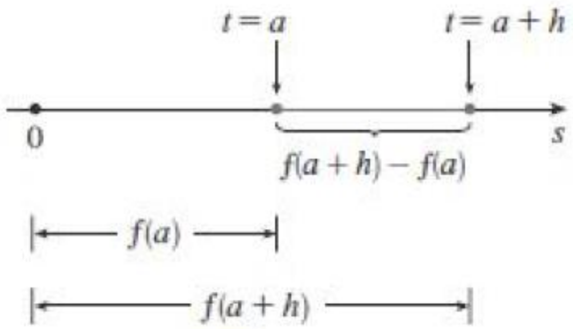


Figura 2

que é igual à inclinação da reta tangente PQ (m_{PQ}), como ilustrado na figura 3.

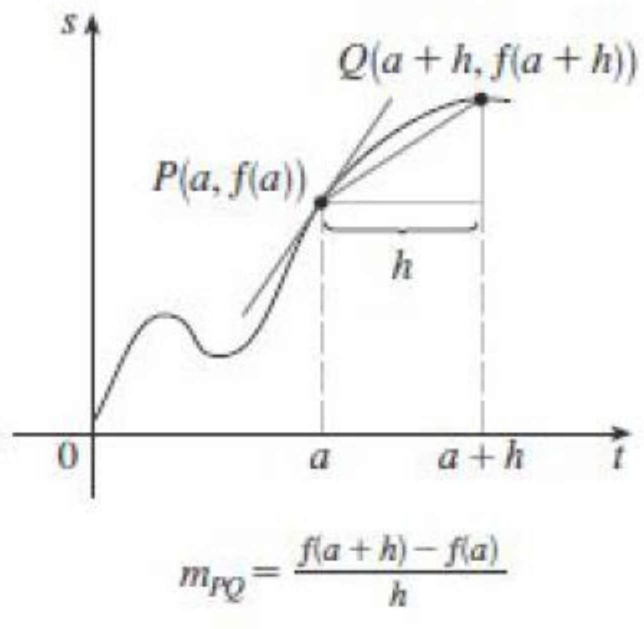


Figura 3

Suponha que a velocidade média seja calculada em intervalos cada vez menores [a,a+h]. Em outras palavras, fazemos h tender a 0. Definimos velocidade (ou velocidade instantânea) v(a) no instante t=a como sendo o limite dessas velocidades médias:

$$v(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

O limite acima representa a derivada da função posição do objeto no ponto a, ou seja: $v(a) = f'(a)$.

De forma análoga à velocidade, e definindo a função velocidade, temos que a aceleração do objeto é dada pela derivada da função velocidade, logo:$a(a) = v'(a)$.

Exemplos:

a) Suponha que um corpo em movimento retilíneo tenha função horária definida por s(t) = 12t – 2t² e no instante t =0 ele inicia o movimento. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine

i) a velocidade média do corpo no intervalo [1,3].

ii) a velocidade do corpo no instante t = 1.

iii) a aceleração média do corpo no intervalo [1,3].

iv) a aceleração do corpo no instante t = 1.

Solução:

i) $v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t} = \frac{s(3)-s(1)}{3-1} = \frac{18-10}{2} = \frac{8}{2} = 4m/s$

ii) $v(t) = s'(t) = 12 - 4t \therefore v(1) = 12 - 4 = 8m/s$

iii) $a_m = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t} = \frac{v(3)-v(1)}{3-1} = \frac{0-8}{2} = -4m/s$

iv) $a(t) = s''(t) = -4 \therefore a(1) = -4m/s^2$

b) Uma partícula em movimento retilíneo tem a função horária dada por $s(\mathrm{t}) = 2\mathrm{t}^3 - 21\mathrm{t}^2 + 60\mathrm{t} + 3$. Considere o espaço medido em metros e o tempo em segundos. Determine

i) em que instante a partícula para, isto é, tem velocidade nula?

ii) a aceleração da partícula no instante t = 4,5s.

Solução:

i) $v(t) = s'(t) = 6t^2 - 42t + 60 \rightarrow v(t) = 6(t^2 - 7 + 10) = 6(t-2)(t-5)$.

$v(t) = 0 \leftrightarrow 6(t-2)(t-5) = 0 \leftrightarrow t = 2s \; ou \; t = 5s$. Assim a partícula tem velocidade nula nos instantes t =2s e t =5s.

ii) $a(t) = s''(t) = 12t - 42 \therefore a(4{,}5) = 12(4{,}5) - 42 = 12m/s^2$.

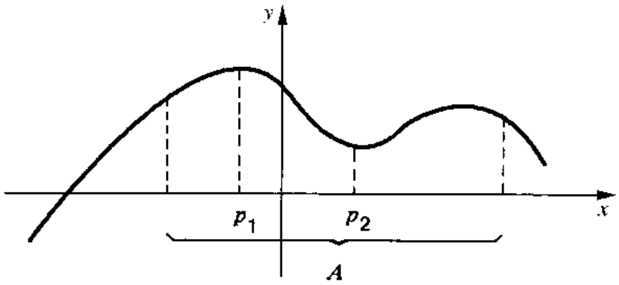
3.3 - Valores Máximo e Mínimo

Algumas das aplicações mais importantes do cálculo diferencial são os problemas de otimização, em que devemos encontrar a melhor maneira de fazer alguma coisa. A seguir estão citados alguns problemas de otimização:

- Qual é a forma de uma lata que minimiza o custo manufatura?
- Qual é a aceleração máxima de um ônibus espacial?
- Qual é o raio de uma traqueia contraída que expele mais rapidamente o ar durante uma tosse?
- Sob que ângulo os vasos sanguíneos devem ramificar de forma a minimizar a energia despendida pelo coração no bombeamento do sangue?

Esses problemas podem ser reduzidos ao encontrar os valores máximos ou mínimos de uma função.

Definição 1: Sejam f uma função, A ⊂ D_f e p ϵ A. Dizemos que f(p) é o valor máximo de f em A ou que p um ponto máximo de f em A se f(x) ≤ f(p) para todo x em A. Se f(x) ≥ f(p) para todo x em A, dizemos então que f(p) é o valor mínimo de f em A ou que p é um ponto mínimo de f em A.



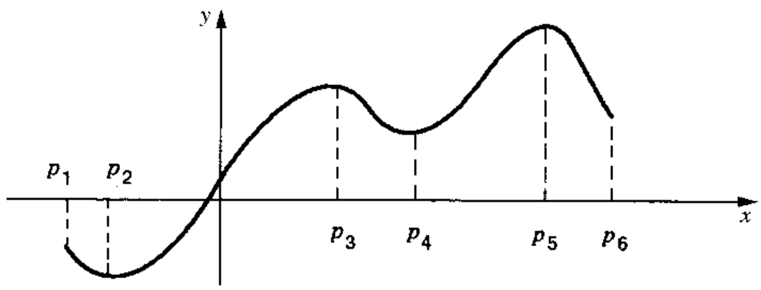
$f(p_1)$ valor máximo de f em A
$f(p_2)$ valor mínimo de f em A

Um problema frequente refere-se a uma função dada num certo intervalo, em que queremos encontrar o maior ou o menor valor da função. Esses intervalos podem ser fechados, abertos ou fechados num extremo e abertos no outro. O maior valor da função no intervalo é chamado de valor máximo absoluto e o menor valor da função no intervalo é chamado de valor mínimo absoluto.

Um extremo absoluto de uma função num intervalo é o valor máximo absoluto ou um valor mínimo absoluto da função no intervalo. Uma função pode ou não ter um extremo absoluto num intervalo dado.

Definição 2: Sejam f uma função e p ϵ D_f. Dizemos que f(p) é o valor máximo global (ou máximo absoluto) de f ou que p é um ponto de máximo global de f se, para todo x em D_f, f(x) ≤ f(p). Se, para todo x em D_f, f(x) ≥ f(p), diremos então que f(p) é o valor mínimo global (ou mínimo absoluto) de f ou que p é um ponto de mínimo global de f.

Definição 3: Sejam f uma função e p ϵ D_f. Dizemos que p é ponto de máximo local (ou máximo relativo) de f se existir r > 0 tal que f(x) ≤ f(p) para todo x em $]p-r, p+r[\ \cap\ D_f$. Assim, dizemos que p é ponto de mínimo local (ou mínimo relativo) de f se existir r > 0 tal que f(x) ≥ f(p) para todo x em $]p-r, p+r[\ \cap\ D_f$.



p_1, p_3 e p_5 são pontos de máximo local; $f(p_5)$ é o valor máximo global de f
p_2, p_4 e p_6 são pontos de mínimo local; $f(p_2)$ é o valor mínimo global de f

Uma boa maneira de se determinar os pontos de máximo e de mínimo de uma função f é estuda-la com relação a crescimento e decrescimento. Sejam a < c < b; se f for crescente em $]a, c[$ e decrescente em $]c, b[$, então c será um ponto de máximo local de f; se f for decrescente em $]a, c[$ e crescente em $]c, b[$ então c será um ponto de mínimo local de f.

Exemplos:

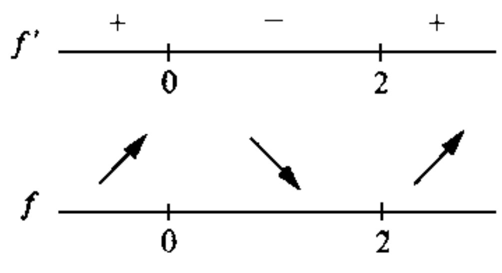
1) Seja f(x) = $x^3 - 3x^2 + 3$.

a)Estude f com relação a máximos e mínimos.

b) Determine os valore máximo e mínimo de f em [– 2,3]. Em que pontos esses valores são atingidos?

Solução:

a) f'(x) = $3x^2 - 6x$

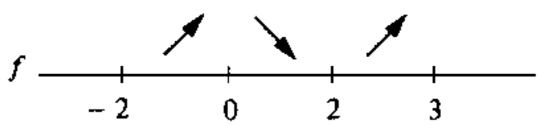


ponto de máximo local: 0
ponto de mínimo local: 2

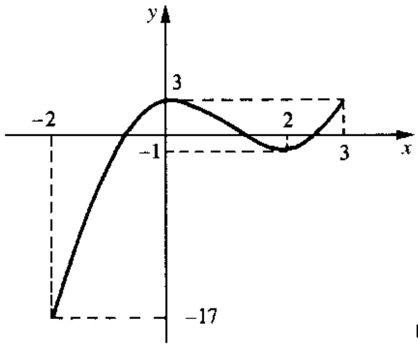
Como $\log_{x\to+\infty}(x^3 - 3x^2 + 3) = +\infty$ e $\log_{x\to-\infty}(x^3 - 3x^2 + 3) = -\infty$, segue que f não assume nem valor máximo global, nem valor mínimo global.

b)

x	$f(x)$
-2	-17
0	3
2	-1
3	3



$f(-2) = -17$ é o valor mínimo de f em $[-2, 3]$.
$f(0) = f(3) = 3$ é o valor máximo de f em $[-2, 3]$.

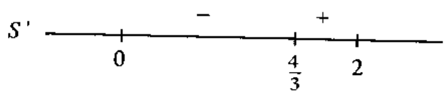


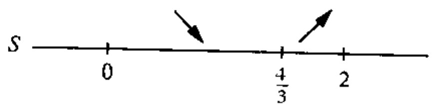
2) Determine dois números positivos cuja soma seja 4 e tal que a soma do cubo do menor com o quadrado do maior seja mínima.

Solução:

Indiquemos por x o número menor ($0 \le x \le 2$); assim o maior é $4 - x$. Seja $S(x) = x^3 + (4 - x)^2$, $0 \le x \le 2$. Devemos determinar x que torna mínimo o valor de S. Temos $S'(x) = 3x^2 + 2x - 8$.

$$3x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4}{3} \\ \text{ou} \\ x = -2 \end{cases}$$





Assim, $x = \frac{4}{3}$ torna mínimo o valor de S.

Conclusão: Os números procurados são $\frac{4}{3}$ e $\frac{8}{3}$.

3) Pede-se construir um cilindro circular reto de área total S dada e cujo volume seja máximo.

Solução:

Precisamos determinar r (raio da base) e h (altura). Temos:

Área da Base = πr^2 e Área Lateral = $2\pi rh$. Assim, $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$.

Daí,

$h = \frac{S-2\pi r^2}{2\,\pi r}$, $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. Podemos, então, exprimir o volume V em função de r

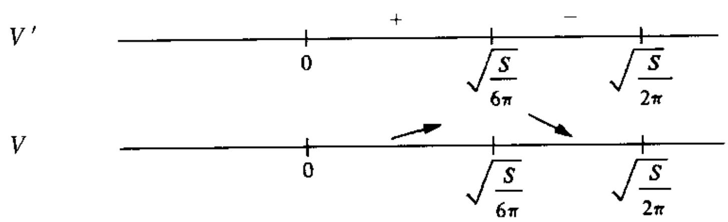
$V(r) = \pi r^2 . \frac{S-2\pi r^2}{2\pi r}, 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ S é constante.

ou

$V(r) = \frac{Sr}{2} - \pi r^3, 0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$. Devemos determinar r que torna V máximo.

$$V'(r) = \frac{S}{2} - 3\pi r^2; \ \frac{S}{2} - 3\pi r^2 = 0 \leftrightarrow r = \pm\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$$

Obs.: A condição $0 < r < \sqrt{\frac{S}{2\pi}}$ é para deixar r > 0 e h>0.



Dessa forma, $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ torna V máximo.

Conclusão: $r = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ e $h = 2\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ são, respectivamente, o raio e a altura do cilindro de volume máximo.

4) Se f(x) = x^2, então f(x) ≥ f(0), pois $x^2 \geq 0$ para todo x. Portanto, f(0) = 0 é o valor mínimo absoluto (e local) de f. Isso corresponde ao fato de que a origem é o ponto mais baixo sobre a parábola y = x^2 (ver Figura 1). Porém, não há um ponto mais alto sobre a parábola e, dessa forma, a função não tem um valor máximo.

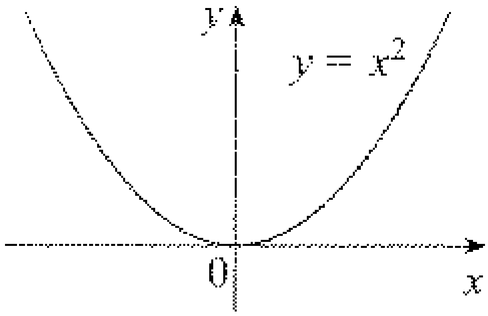


Figura 1 (valor mínimo 0, nenhum máximo)

5) Do gráfico da função $f(x) = x^3$, mostrado na figura 2, vemos que essa função não tem um valor máximo absoluto nem um valor mínimo absoluto. De fato, ela não possui nenhum valor extremo local.

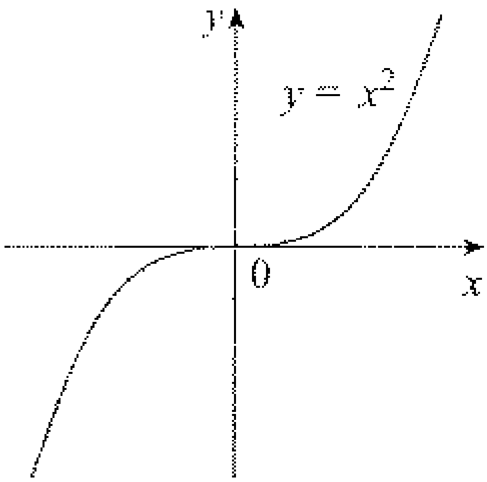


Figura 2 (nenhum mínimo, nenhum máximo)

6) O gráfico da função $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 18x^2$; $-1 \leq x \leq 4$ está mostrado na figura 3. Observa-se que $f(1) = 5$ é um máximo local, enquanto omáximo absoluto é $f(-1) = 37$. Esse máximo absoluto não é um máximo local, pois ocorre em um extremo do intervalo. Nota-se, também, $f(0) = 0$ é um mínimo local, e $f(3) = -27$ é tanto um mínimo local como um mínimo absoluto. Pode-se ver que em $x = 4$, f não tem um máximo local nem um máximo absoluto.

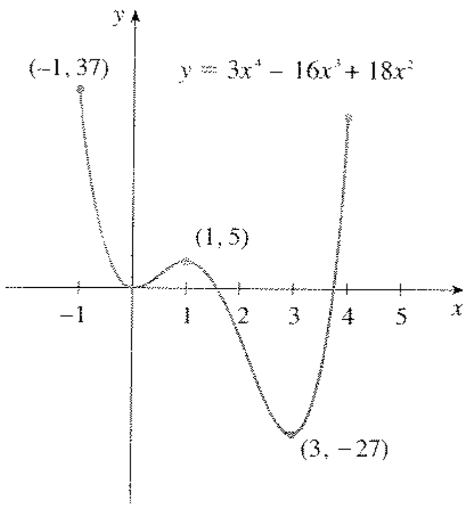


Figura 3

7) Consideremos a função definida por f(x) = – x² . Um esboço do gráfico de f em (– 3,2] está na figura 4. A função f tem um valor máximo absoluto de 0 em nesse intervalo. Não há valor mínimo absoluto de f em em (– 3,2], pois $\lim_{x \to -3^+} f(x) = -9$, mas f(x) é sempre maior que – 9 no intervalo dado.

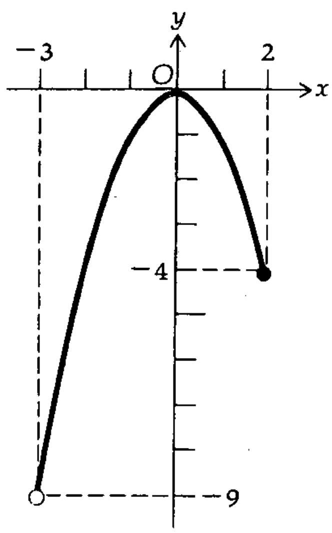


Figura 4

8) Suponha que f seja a função definida por f(x) = 2x. Um esboço do gráfico de f em [1,4) está na figura 5. A função f tem um valor mínimo absoluto de 2 nesse intervalo. Não há valor máximo absoluto de em [1,4), pois $\lim_{x \to 4^-} f(x) = 8$, mas f(x) é sempre menor do que 8 no intervalo dado.

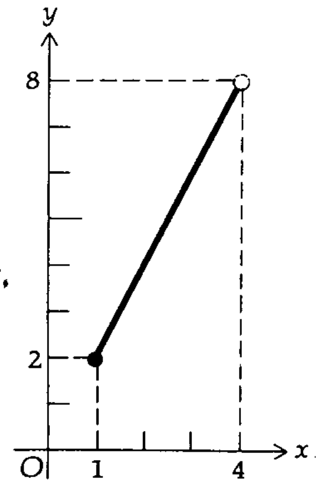


Figura 5

As figuras 6 e 7 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor máximo relativo em c.

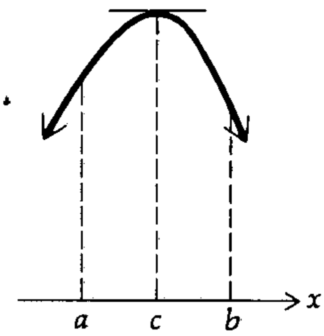


Figura 6

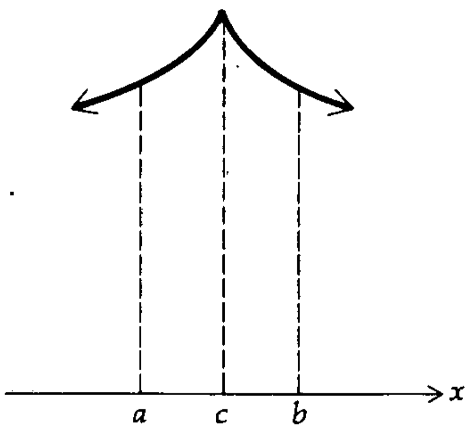


Figura 7

As figuras 8 e 9 mostram o esboço de parte do gráfico de uma função, tendo um valor mínimo relativo em c.

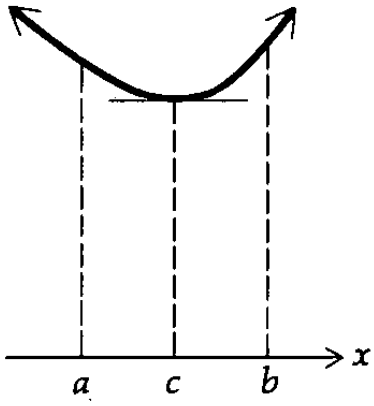


Figura 8

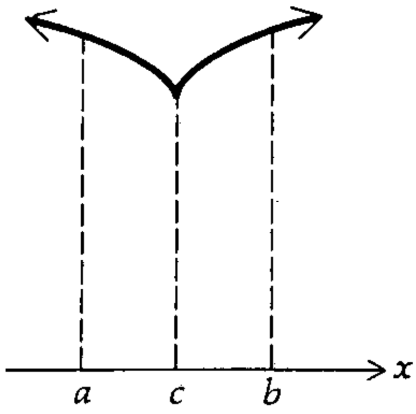


Figura 9

Observação:

Se a função tiver um máximo relativo em c ou um mínimo relativo, então dizemos que f tem um extremo relativo em c.

O teorema a seguir será usado para localizar os valores possíveis de c para os quais existe um extremo relativo.

Teorema:

Se $f(x)$ foi definida para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b) e se f tiver um extremo relativo em c, onde $a < c < b$, então $f'(c) = 0$, se $f'(c)$ existir.

A interpretação geométrica desse teorema é que se tiver extremo relativo em c, e se f'(c) existir, então o gráfico de f precisará ter uma reta tangente horizontal no ponto onde x = c.

Demonstração: A demonstração será dada para o caso em que f tem um valor mínimo relativo em c.

Se $f'(x)$ existir, então

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Como f tem um valor mínimo relativo em c, existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } 0 < |x - c| < \delta, \text{ então } f(x) - f(x) \geq 0$$

Se x tende a c pela direita, $x - c > 0$; logo

$$\text{se } 0 < x - c < \delta, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

Se o limite existir

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geqslant 0$$

(I)

Assim, se x tende a c pela esquerda, x – c < 0 e, portanto,

$$\text{se } -\delta < x - c < 0, \text{ então } \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

Da mesma forma, se o limite existir,

$$\lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leqslant 0$$

(II)

Como f' (c) existe, os limites nas desigualdades (I) e (II) têm que ser iguais a f'(c). Assim, de (I),

$$f'(c) \geqslant 0$$

e de (II),

$$f'(c) \leqslant 0$$

Como ambas as desigualdades são verdadeiras, concluímos que

$$f'(c) = 0$$

que era o que queríamos provar.

Se f for uma função derivável em um intervalo aberto $]a, b[$, então os únicos valores possíveis para x para os quais f pode ter um extremo relativo são aqueles em que f' (x) = 0; no entanto, f'(x) pode ser igual a zero para um valor específico de x, sem que f possua um extremo relativo neste ponto. Em doutra palavras, para funções deriváveis em um intervalo $]a, b[$, a anulação da derivada em um ponto c é condição necessária mas não suficiente para que c seja um extremo relativo, e essa afirmação será comprovada no exemplo a seguir.

Exemplo:

Consideremos a função f definida por $f(x) = (x - 1)^3$.

Um esboço do gráfico dessa função está na figura 10. f'(x)=3.(x – 1)^2, e assim f'(1) = 0. Mas, f(x) < 0 se x < 1 e f(x) > 0 se x > 1. Assim, f não tem um extremo relativo em 1.

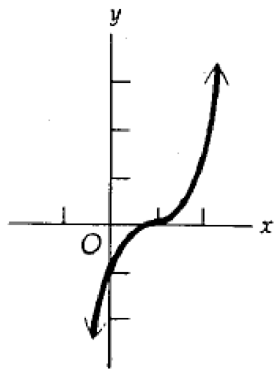


Figura 10

Uma função pode ter um extremo relativo num número e f' pode não existir para esse número. Isso é mostrado no exemplo a seguir.

Exemplo:

Seja f uma função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{se } x \leqslant 3 \\ 8 - x & \text{se } 3 < x \end{cases}$$

Um esboço do gráfico dessa função está na figura 11. A função f tem um valor máximo relativo em 3. A derivada à esquerda em 3 é dada por $f' - (3) = 2$, enquanto que a derivada à direita de 3 é dada por $f' + (3) = -1$. Concluímos, então, que f'(3) não existe.

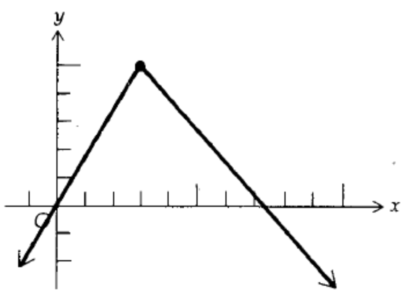


Figura 11

É possível que uma função f possa ser definida num número c, em que f'(c) não exista e ainda f pode ter um extremo relativo nesse número. Tal função será ilustrada no exemplo a seguir.

Exemplo: Seja a função f definida por $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.

O domínio de f é o conjunto de todos os números reais.

$$f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}} \qquad \text{se } x \neq 0$$

Além disso, f'(0) não existe. A figura 12 mostra um esboço do gráfico de f. A função não tem extremos relativos. Em suma, se uma função f está definida em um número c, uma condição necessária à existência de um extremo relativo para que f é que f' (c) = 0 ou f' (c) não exista. Porém, essa condição não é suficiente.

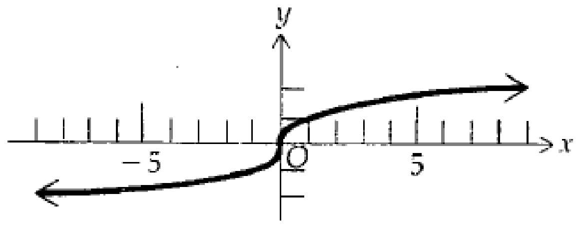


Figura 12

Definição:

Se c for um número no domínio da função f e se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existir, então c será chamado de **número crítico** de f.

Dessa definição e da discussão anterior, uma condição necessária (mas não suficiente) à existência de um extremo relativo em c é que c seja um número crítico.

Exemplo: Ache os números críticos da função f definida por $f(x) = x^{\frac{4}{3}} + 4x^{\frac{1}{3}}$.

Solução:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \tfrac{4}{3}x^{1/3} + \tfrac{4}{3}x^{-2/3} \\ &= \tfrac{4}{3}x^{-2/3}(x+1) \\ &= \frac{4(x+1)}{3x^{2/3}} \end{aligned}$$

Quando $x = -1$, $f'(x) = 0$ e quando $x = 0$, $f'(x)$ não existe. Ambos -1 e 0 estão no domínio de f; logo, os pontos críticos de f são -1 e 0.

Lembrete:

Um ponto c no domínio de uma função f é chamado *ponto crítico* se ocorre um dos dois seguintes casos:

(a) f não é derivável em $x = c$.

(b) f é derivável em c e $f'(c) = 0$.

Exemplo:

Encontre os valores de máximo e mínimo da função f:[4,2] →R definida por $f(x)=x^3 + 2x^2 – 4x – 2$.

Solução:

A função é derivável no intervalo aberto (– 4,2). A derivada da função é $f'(x) = 3x^2 + 4x – 4$. Os únicos pontos críticos de f são os valores em que $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = – 2$ ou $x = \frac{2}{3}$.

Os valores de f nos pontos críticos são $f(– 2) = 6$ e $f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{94}{27}$.

Os valores de f nos pontos inicial e final do intervalo são $f(– 4) = – 18$ e $f(2) = 6$.

Comparando esses números, concluímos que o mínimo absoluto da função no intervalo é $f(– 4) = – 18$ e o máximo absoluto da função é $f(– 2) = f(2) = 6$. Ver figura 13 abaixo.

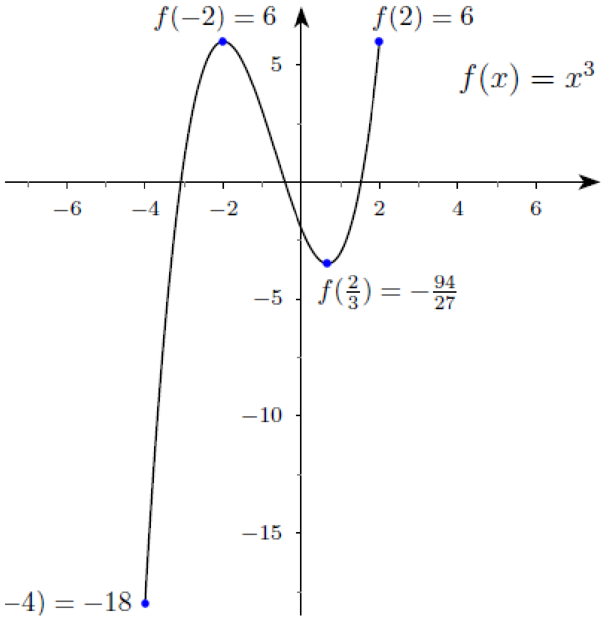


Figura 13

3.4 - O Teorema do Valor Médio

Um dos resultados mais importantes do Cálculo Diferencial é o denominado Teorema do Valor Médio. Ele será usado para provar resultados que permitem analisar aspectos do comportamento global de uma função (como intervalos de crescimento e decrescimento, concavidade, etc.) a partir de sua função derivada.

A demonstração do Teorema do Valor Médio é baseada num caso particular, conhecido como Teorema de Rolle.

Seja f uma função contínua no intervalo fechado [a,b], derivável no intervalo aberto (a,b) e tal que f(a) = 0 e f(b) = 0. O matemático francês Michel Rolle (1652 – 1719) provou que se uma função satisfaz essas condições, existe pelo menos um número c entre a e b para o qual f' (c) = 0.

As ilustrações a seguir propiciarão um entendimento do significado geométrico disso. A figura 1 mostra um esboço do gráfico de uma função f que satisfaz as condições do que foi exposto no parágrafo anterior. Intuitivamente podemos ver que existe pelo menos um ponto sobre a curva entre os pontos (a,0) e (b,0), onde a reta tangente é paralela ao eixo x; ou seja, a inclinação da reta tangente é zero. Tal situação é ilustrada na Figura 1, no ponto P, sendo a abscissa de P o valor c e f'(c) = 0.

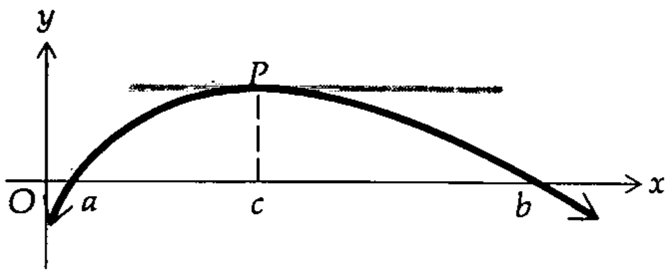


Figura 1

A função cujo gráfico está esboçado na Figura 1 não é derivável apenas no intervalo aberto (a,b); isso ocorre também nos extremos do intervalo. Entretanto, a condição de que f seja derivável nos extremos não é necessária para que o gráfico tenha uma reta tangente horizontal em algum ponto no intervalo (fato ilustrado na figura 2).

A função ilustrada na figura 2 não é derivável em a e b, no entanto existe uma reta tangente no ponto onde x = c e c está entre a e b.

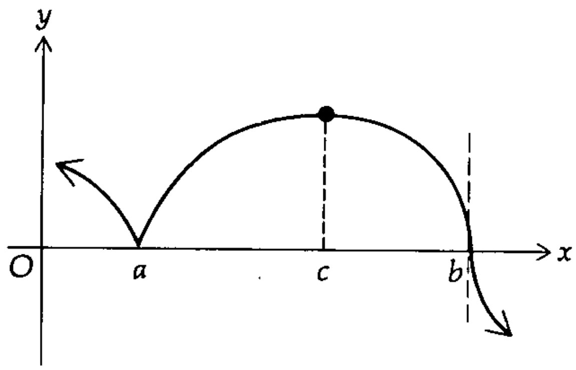


Figura 2

Porém, é necessário que a função seja contínua nos extremos do intervalo para garantir a existência dessa tangente. A Figura 3 mostra um esboço do gráfico de uma função que é contínua no intervalo [a,b), mas descontínua em b; a função é derivável no intervalo aberto (a,b), e os valores funcionais são zero em ambos os pontos, a e b. Não existe, contudo, nenhum ponto no qual o gráfico possua uma reta tangente horizontal.

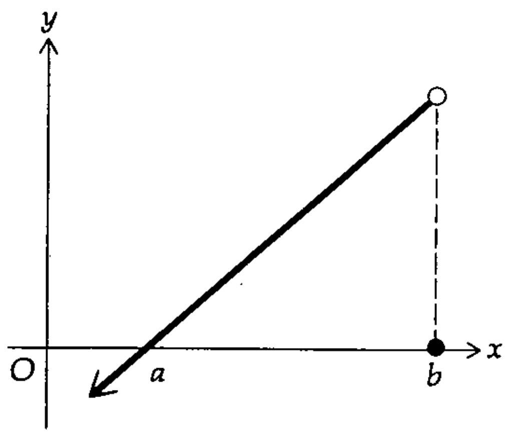


Figura 3

Teorema de Rolle

> Seja f uma função, tal que
>
> (i) ela seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
> (ii) ela seja derivável no intervalo aberto (a, b);
> (iii) $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$.
>
> Então existe um número c no intervalo aberto (a, b), tal que
>
> $f'(c) = 0$.

Prova:

Caso 1: $f(x) = 0$ para todo x em $[a, b]$.

Então, $f'(x) = 0$ para todo x em (a, b); logo, qualquer número entre a e c pode ser tomado como c.

Caso 2: $f(x)$ não se anula para todos os valores de x no intervalo aberto (a, b).

Como f é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, do teorema do valor extremo, f tem um valor máximo e um valor mínimo absolutos em $[a, b]$. De (iii), $f(a) = 0$ e $f(b) = 0$. Além disso, $f(x)$ não é zero para todo x em (a, b). Logo, f terá um valor máximo absoluto positivo em algum c_1 de (a, b), ou um valor mínimo absoluto negativo em algum c_2 de (a, b), ou ambos. Assim, para $c = c_1$ ou $c = c_2$, conforme o caso, existe um extremo absoluto num ponto interior ao intervalo $[a, b]$. Logo, o extremo absoluto $f(c)$ é também um extremo relativo, e como por hipótese existe $f'(c)$, segue que $f'(c) = 0$. Isso prova o teorema. ■

Pode existir mais de um número no intervalo aberto (a, b), para o qual a derivada de f seja zero. Isso é ilustrado geometricamente na Figura 4, onde a reta tangente é horizontal no ponto onde $x = c_1$ e também no ponto onde $x = c_2$; assim, ambos $f'(c_1) = 0$ e $f'(c_2) = 0$.

O inverso do teorema de Rolle não é verdadeiro. Isto é, não podemos concluir que se uma função f for tal que $f'(c) = 0$, como $a < c < b$, então serão verdadeiras as condições (i), (ii) e (iii).

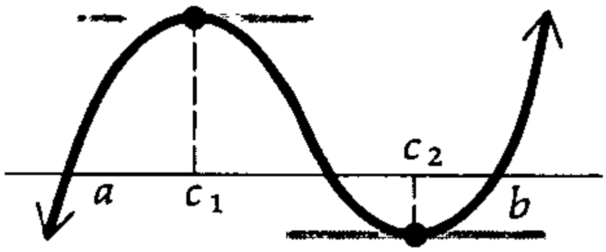


Figura 4

Exemplo:

Dada f(x) = $4x^3 - 9x$

comprove que as condições (i), (ii) e (iii) das hipóteses do teorema de Rolle estão satisfeitas em cada um dos seguintes intervalos: $[-\frac{3}{2}, 0]$, $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Ache então um valor de c em cada um desses intervalos para os quais $f'(c) = 0$.

Solução:

$f'(x) = 12x^2 - 9$

Como $f'(x)$ existe para todos os valores de x, f é derivável em $(-\infty, +\infty)$. Assim, as condições (i) e (ii) do teorema de Rolle são válidas em qualquer intervalo. Para determinar em quais intervalos a condição (iii) se verifica, encontramos os valores de x para os quais $f(x) = 0$. Se $f(x) = 0$,

$$4x(x^2 - \tfrac{9}{4}) = 0$$

$$x = -\tfrac{3}{2} \qquad x = 0 \qquad x = \tfrac{3}{2}$$

Com $a = -\frac{3}{2}$ e $b = 0$ o teorema de Rolle é válido em $[-\frac{3}{2}, 0]$. Analogamente, o teorema de Rolle é válido em $[0, \frac{3}{2}]$ e $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

Para encontrar os valores adequados de c, equacionamos $f'(x) = 0$, obtendo

$$12x^2 - 9 = 0$$

$$x = -\tfrac{1}{2}\sqrt{3} \qquad x = \tfrac{1}{2}\sqrt{3}$$

Portanto, no intervalo $[-\frac{3}{2}, 0]$, uma escolha adequada para c é $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$. No intervalo $[0, \frac{3}{2}]$, tomamos $c = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, enquanto que no intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ temos duas possibilidades para c: $-\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ou $\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

Teorema do Valor Médio

Seja f uma função, tal que

(i) seja contínua no intervalo fechado $[a, b]$;
(ii) seja derivável no intervalo aberto (a, b).

Então, existirá um número c no intervalo aberto (a, b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretação Geométrica do Teorema do Valor Médio

Num esboço do gráfico da função f, $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ é a inclinação do segmento de reta que liga os pontos A(a,f(a)) e B(b,f(b)). O Teorema do Valor Médio afirma que existe um ponto sobre a curva entre A e B, onde a reta tangente é paralela à reta secante por A e B; isto é, existe um número c em (a,b), tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

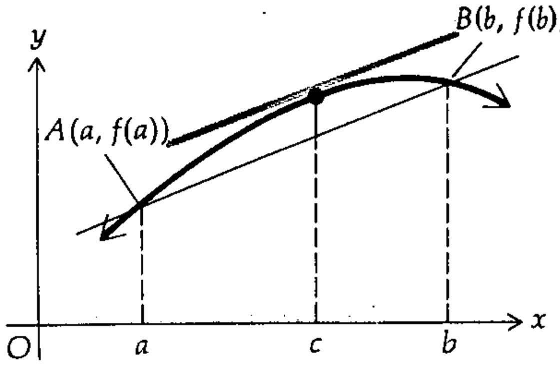


Figura 5

Se tomarmos o eixo x coincidente com a reta secante AB, podemos observar que o teorema do valor médio é uma generalização do teorema de Rolle, o qual será usado em sua demonstração.

Prova do Teorema do Valor Médio

Uma equação da reta que passa por A e B na Figura 5 é

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

$$\Leftrightarrow \qquad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

Seja, agora, F(x) a medida da distância vertical entre o ponto (x,f(x)) do gráfico da função f e o ponto correspondente sobre a reta secante por A e B; então,

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \qquad \text{(I)}$$

Vamos mostrar que a função F satisfaz as três condições da hipótese do Teorema de Rolle.

A função F é contínua no intervalo fechado [a,b], pois é a soma de f com uma função polinomial linear, ambas as quais são contínuas no intervalo. Logo, a condição (i) está satisfeita por F. A condição (ii) está satisfeita por F, pois f é derivável em (a,b). De (I), segue que F(a) = 0 e F(b) = 0. Portanto, também a condição (iii) do Teorema de Rolle está satisfeita por F.

Da conclusão do Teorema de Rolle, temos que existe um c no intervalo aberto (a,b), tal que F'(c) = 0. Mas

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Assim,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Logo, existe um número c em (a,b), tal que

$$0 = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$\Leftrightarrow \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

como queríamos demonstrar.

Exemplo:

Dada $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, comprove que as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas para a = 1 e b = 3. Então, encontre todos os números c no intervalo aberto (1,3), tais que

$$f'(c) = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$$

Solução:

Como f é uma função polinomial, ela será contínua e derivável para todos os valores de x. Logo, as hipóteses do Teorema do Valor Médio estão satisfeitas para todo a e b.

$$f'(x) = 3x^2 - 10x - 3$$

$$f(1) = -7 \quad \text{e} \quad f(3) = -27$$

Logo

$$\frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{-27 - (-7)}{2}$$

$$= -10$$

Equacionando f'(c) = – 10, obtemos

$$3c^2 - 10c - 3 = -10$$

$$3c^2 - 10c + 7 = 0$$

$$(3c - 7)(c - 1) = 0$$

$$c = \tfrac{7}{3} \qquad c = 1$$

Como 1 não está no intervalo aberto (1,3), o único valor possível para c é $\frac{7}{3}$.

Exemplo:

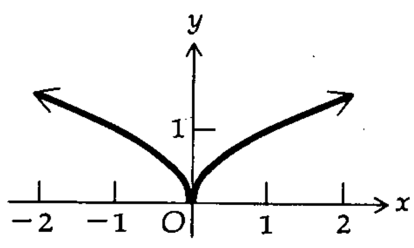
Dada $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$, faça um esboço do gráfico de f. Mostre que não existe nenhum número c no intervalo aberto (– 2 , 2), tal que

$$f'(c) = \frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)}$$

Que condições dentre as hipóteses do Teorema do Valor Médio não está satisfeita para f quando a = – 2 e b = 2?

Solução:

Segue esboço do gráfico de f.



$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{\frac{-1}{3}}$$

Assim,

$$f'(c) = \frac{2}{3c^{1/3}}$$

$$\frac{f(2) - f(-2)}{2 - (-2)} = \frac{4^{1/3} - 4^{1/3}}{4}$$

$$= 0$$

Não existe um número c para o qual $\frac{2}{3c^{\frac{1}{3}}} = 0$.

A função f é contínua no intervalo fechado $[-2, 2]$; contudo, f não é derivável no intervalo aberto $(-2, 2)$, pois $f'(0)$ não existe. Logo, a condição (ii) das hipóteses do teorema do valor médio não está satisfeita para f, quando $a = -2$ e $b = 2$.

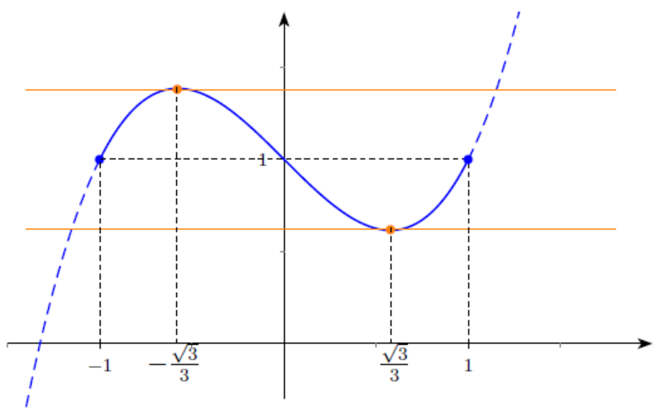
Exemplo:

Seja a função $f(x) = x^3 - x + 1$. Temos que $f(-1) = f(1) = 1$. Pelo Teorema de Rolle, há pelo menos um valor de $x \in (-1, 1)$ tal que $f'(x) = 0$.

De fato, como $f(x) = x^3 - x + 1 \implies f'(x) = 3x^2 - 1$, então

$$f'(x) = - \implies 3x^2 - 1 = 0 \implies x^2 = \frac{1}{3} \implies x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\ .$$

Tanto $\frac{\sqrt{3}}{3}$ quanto $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ estão contidos no intervalo $(-1, 1)$.



3.5 - Como as Derivadas Afetam a Forma do Gráfico

Muitas das aplicações do cálculo estão sujeitas a nossa capacidade para deduzir fatos sobre uma função f a partir de informações a respeito de suas derivadas.

Como $f'(x)$ representa a inclinação da curva y = $f(x)$ no ponto (x, f(x)), ela nos dá a direção segundo a qual a curva segue em cada ponto. Dessa forma, é possível esperar que a informação sobre $f'(x)$ nos dê informações sobre $f(x)$.

O que f' nos diz sobre f ?

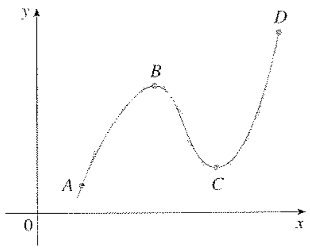


Figura 1

Para observar como a derivada de f pode nos dizer o intervalo em que uma função é crescente ou decrescente, veja a Figura 1. Entre A e B e entre C e D as retas tangentes têm inclinação positiva, logo $f'(x) > 0$. Entre B e C, as retas tangentes têm inclinação negativa, portanto $f'(x) < 0$. Desse modo, parece que f cresce quando $f'(x)$ é positiva e decresce quando $f'(x)$ é negativa. Para demonstrar que isso é sempre válido vamos utilizar o Teorema do Valor Médio.

Teste Crescente/Decrescente ou Teste C/D

(i) Se $f'(x) > 0$ sobre um intervalo, então f é crescente nele.

(ii) Se $f'(x) < 0$ sobre um intervalo, então f é decrescente nele.

Prova:

i) Sejam x_1 e x_2 dois números quaisquer no intervalo com $x_1 < x_2$. De acordo com a definição de uma função crescente temos para mostrar que $f(x_1) < f(x_2)$.

Como estamos considerando que $f'(x) > 0$, sabemos que f é diferenciável em [x_1, x_2]. Logo pelo Teorema do Valor Médio, existe um número c entre x_1 e x_2 tal que $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ (I)

Agora $f'(c) > 0$ por hipótese e $(x_2 - x_1) > 0$, $(x_1) < (x_2)$. Assim o lado inteiro da equação (I) é positivo, e $f(x_2) - f(x_1) > 0$ ou $f(x_1) < f(x_2)$. Isso mostra que f é cescente.

A parte (ii) é provada de forma semelhante.

Exemplo 1:

Encontre o intervalo em que a função $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ é crescente e o intervalo no qual ela é decrescente.

Solução:

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x^2 - x - 2) = 12x(x - 2)(x + 1)$.

Para usar o Teste C/D devemos conhecer em que intervalos $f'(x) > 0$ e $f'(x) < 0$. Isso depende dos sinais dos fatores de$f(x)$. Dividimos a reta real em intervalos cujos extremos são os números críticos -1, 0 e 2 e dispomos esses dados em uma tabela. Um sinal de adição indica que a expressão dada é positiva, e um sinal de subtração indica que é negativa. A última coluna da tabela fornece a conclusão baseada no Teste C/D. Por exemplo, $f'(x) < 0$ para 0 < x < 2, logo fé decrescente em (0,2). (É também verdade dizer que f é decrescente no intervalo fechado [0,2]).

Intervalo	12x	x – 2	x + 1	$f'(x)$	f
x < 1	–	–	–	–	Decrescente em (– ∞, – 1)
–1<x<0	–	–	+	+	Crescente em (– 1, 0)
0<x<2	+	–	+	–	Decrescente em (0,2)
x > 2	+	+	+	+	Crescente em (2, +∞)

O gráfico a seguir confirma as informações contidas na tabela.

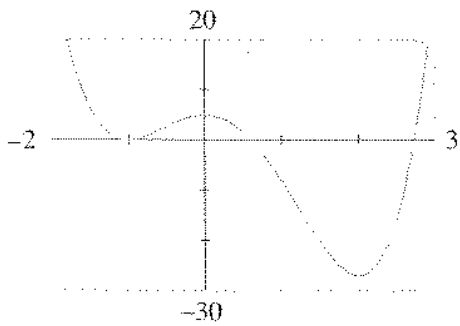


Figura 2

Observação: Se f possui um máximo ou mínimo local em c, então c deve ser um número crítico de f, mas nem todo número crítico dá origem a um máximo ou mínimo. Consequentemente, precisamos de um teste que nos diga se f possui ou não um máximo ou mínimo local em um número crítico. Observando a figura 2 vemos que f(0) = 5é um valor máximo local de f, pois f cresce em (–1, 0) e decresce em (0, 2). Com relação às derivadas, $f'(x) > 0$ para –1 < x < 0 e $f'(x) < 0$ para 0 < x < 2. Assim, o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0. Essa observação é a base do teste a seguir.

Teste da Derivada Primeira

Suponha que c seja um número crítico de uma função contínua f.

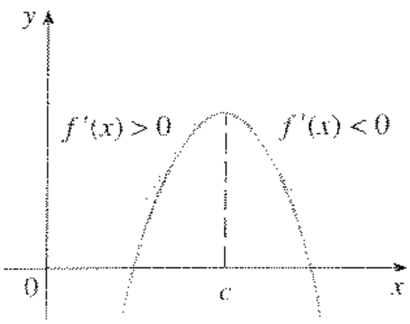
(i) Se o sinal de f'mudar de positivo para negativo em c, então f tem um máximo local em c.

(ii) Se o sinal de f'mudar de negativo para positivo em c, então f tem um mínimo local em c.

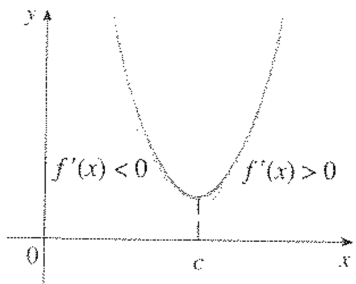
(iii) Se f' não mudar de sinal em c (isto é, se em ambos os lados de c o sinal de f' for positivo ou negativo), então f não tem um máximo ou mínimo locais em c.

O Teste da Derivada Primeira é uma consequência do Teste C/D. Na parte (i), por exemplo, uma vez que o sinal de $f'(x)$muda de positivo para negativo em c, f é crescente à esquerda de c e decrescente à direita. Segue-se que f tem um máximo local em c.

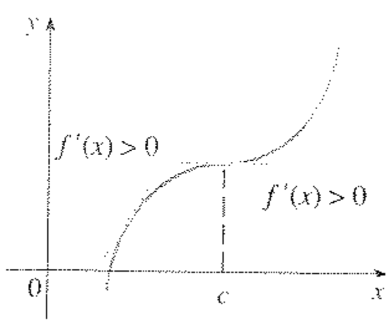
Lembretes para o Teste da Derivada Primeira:



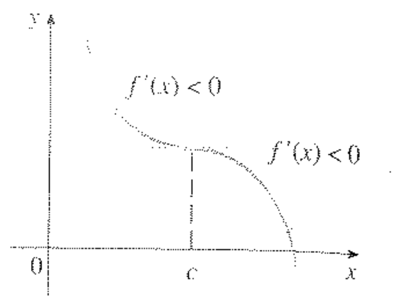
(a) Máximo local



(b) Mínimo local



(c) Nem máximo, nem mínimo



(d) Nem máximo, nem mínimo

Exemplo 2:

Encontre os valores de máximo e mínimo locais da função f do Exemplo 1.

Solução:

Da tabela, na solução do Exemplo 1, observa-se que o sinal de $f'(x)$ muda de negativo para positivo em – 1, logo $f(-1) = 0$ é um valor mínimo local pelo Teste da Derivada Primeira. Analogamente, o sinal de f' muda de negativo para positivo em 2, portanto $f(2) = -27$ é também um valor mínimo local. Como notado anteriormente, $f(0) = 5$ é um valor máximo local, pois o sinal de $f'(x)$ muda de positivo para negativo em 0.

Exemplo 3:

Dada a função $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ ache os extremos de f, aplicando o teste da derivada primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos nos quais f é crescente e aqueles em que f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução:

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$f'(x)$ existe para todos os valores de x. Equacione $f'(x) = 0$.

$$3x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$3(x - 3)(x - 1) = 0$$

$$x = 3 \qquad x = 1$$

Dessa forma, os números críticos de f são 1 e 3. Para se determinar se f possui um extremo relativo nesses números, aplica-se o Teste da Derivada Primeira. Os resultados estão resumidos na tabela abaixo.

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 1$		+	f é crescente
$x = 1$	5	0	f tem um valor máximo relativo
$1 < x < 3$		–	f é decrescente
$x = 3$	1	0	f tem um valor mínimo relativo
$3 < x$		+	f é crescente

Segundo a tabela, 5 ´um valor máximo relativo de f ocorrendo em x = 1, e 1 é um valor mínimo relativo de f, ocorrendo em x = 3.

Esboço do gráfico na Figura 3.

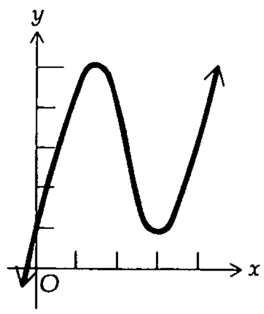


Figura 3

Exemplo 4:

Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4\,, se\; x < 3 \\ 8 - x, se\; x \geq 3 \end{cases}$

Ache os extremos relativos de f, aplicando o Teste da Derivada Primeira. Determine os valores de x nos quais ocorrem extremos relativos, bem como os intervalos em que f é crescente e aqueles onde f é decrescente. Faça um esboço do gráfico.

Solução:

Se x < 3, $f'(x) = 2x$. Se x > 3, $f'(x) = -1$. Como $f'_{-}(3) = 6$ e $f'_{+}(3) = -1$, $f'(3)$não existe. Logo, 3 é um número crítico de f. Como $f'(x) = 0$ se x = 0, segue que 0 é um número crítico de f . Alicando o Teste da Derivada Primeira, os resultados estão resumidos na tabela abaixo,

	$f(x)$	$f'(x)$	*Conclusão*
$x < 0$		$-$	f é decrescente
$x = 0$	-4	0	f tem um valor mínimo relativo
$0 < x < 3$		+	f é crescente
$x = 3$	5	não existe	f tem um valor máximo relativo
$3 < x$		$-$	f é decrescente

Esboço do gráfico na Figura 4.

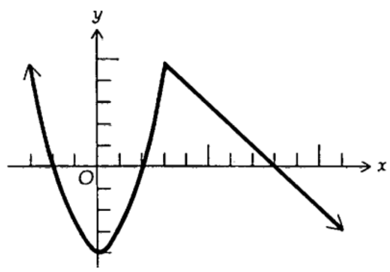


Figura 4

3.5.1 – Traçado do Gráfico de uma Função

O roteiro apresentado abaixo reúne o que se deve conhecer de cada função para a qual queremos traçar o gráfico:

(i) domínio e continuidade da função;

(ii) assíntotas verticais e horizontais;

(iii) derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento;

(iv) valores de máximo e mínimo locais;

(v) concavidade e pontos de inflexão;

(vi) esboço do gráfico.

É importante observar que nem todo item é relevante para toda função. Por exemplo, uma função pode não ter assíntotas. Por outro lado, para o esboço final do gráfico pode ser interessante também determinar os pontos de interseção do gráfico da função com os eixos coordenados.

No caso de haver assíntotas verticais e horizontais, para melhor compreensão do gráfico da função, é interessante desenhar as retas assíntotas no gráfico. Devemos lembrar que uma função contínua f tem assíntota vertical na reta x = a se

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$$

e que uma função contínua f tem assíntota horizontal na reta y = b se

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

Exemplo 1:

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

i) Domínio e continuidade de f

A função f está definida e é contínua para todo x ϵ $\mathbb{R}$.

ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+\frac{1}{x}}=0\ .$$

Logo, $y=0$ é uma assíntota horizontal.

iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'=\frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\ .$$

Como $(x^2+1)^2>0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, podemos considerar apenas os sinais de $(1-x^2)$.

intervalo	$1-x^2$	sinal de f'	f
$x<-1$	$-$	$-$	decrescente
$-1<x<1$	$+$	$+$	crescente
$x>1$	$-$	$-$	decrescente

Portanto,

f é decrescente em $(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$ e f é crescente em $(-1,1)$.

iv) Valores de máximo e de mínimo locais

Os pontos críticos de f são:

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}=0 \Rightarrow 1-x^2=0 \Rightarrow x=-1 \text{ ou } x=1\ .$$

Observando os sinais de f', pelo Teste da Derivada Primeira resulta que f tem mínimo local em x = –1 e f tem máximo local em x = 1.

v) Concavidade e pontos de inflexão

Derivando novamente a função:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{-2x(x^2+1)^2-(1-x^2).2.(x^2+1).2x}{(x^2+1)^4}\\ &= \frac{2x(x^2+1)\left(-(x^2+1)-2(1-x^2)\right)}{(x^2+1)^4}\\ &= \frac{2x(x^2+1)(x^2-3)}{(x^2+1)^4}\\ &= \frac{2x(x^2-3)}{(x^2+1)^3}\ . \end{aligned}$$

Como $(x^2 + 1)^3$ é sempre positivo, podemos considerar apenas o sinal de $2x(x^2 - 3)$. As raízes de $x^2 - 3$ são $x = \pm\sqrt{3}$. O estudo de sinais está no quadro a seguir:

intervalo	$2x$	$x^2 - 3$	sinal de f''	concavidade
$x < -\sqrt{3}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$-\sqrt{3} < x < 0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0 < x < \sqrt{3}$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$x > \sqrt{3}$	$+$	$+$	$+$	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há três mudanças de concavidade no domínio da função. Os pontos $x = -\sqrt{3}$, $x = 0$ e $x = +\sqrt{3}$ são todos pontos de inflexão do gráfico de f.

vi) Esboço do gráfico

Usando as informações dos itens anteriores, o gráfico será esboçado na Figura 1 abaixo. A interseção com o eixo y é o ponto $(0, f(0)) = (0,0)$. Os pontos de máximo e de mínimo locais serão assinalados em azul e os pontos de inflexão, em vermelho.

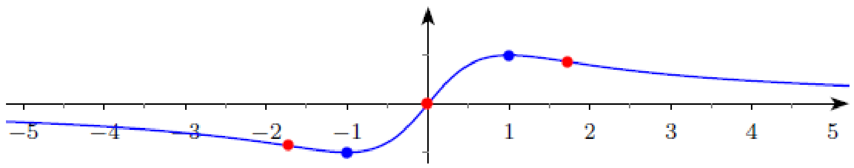


Figura 1

Exemplo 2:

Esboce o gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$.

i) Domínio e continuidade de f

A função f não está definida para $x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$, portanto o domínio é

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \infty) .$$

Essa separação do domínio em três intervalos é interessante porque teremos que investigar o comportamento da função quando x se aproxima dos extremos desses intervalos.

ii) Assíntotas verticais e horizontais.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-\frac{1}{x}}=0\ .$$

Logo, $y=0$ é uma assíntota horizontal.

Como $\lim_{x\to-1}x^2-1=0$, mas $x^2-1>0$ se $x<-1$ e $x^2-1<0$ se $-1<x<1$ então

$$\lim_{x\to-1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to-1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty\ .$$

Como $\lim_{x\to1}x^2-1=0$, mas $x^2-1>0$ se $x>1$ e $x^2-1<0$ se $-1<x<1$ então

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x}{x^2-1}=-\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to1^+}\frac{x}{x^2-1}=\infty\ .$$

Portanto, o gráfico de f tem assíntotas verticais em x = –1 e em x = 1 e assíntota horizontal em y = 0. A informação sobre os limites infinitos e limites no infinito permite fazer o esboço prévio da Figura 2.

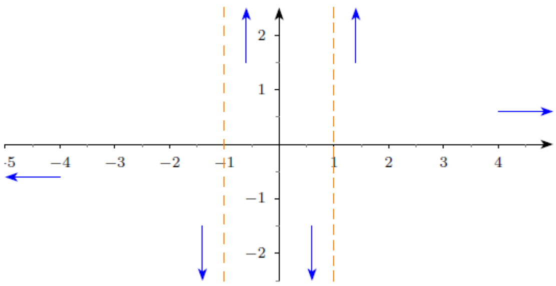


Figura 2

iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A derivada da função é

$$f'(x)=\left(\frac{x}{x^2-1}\right)'=\frac{(x^2-1)-x(2x)}{(x^2-1)^2}=\frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}\ .$$

Como $(x^2-1)^2>0$ para todo $x\neq\pm1$ e $-(1+x^2)<0$ para todo x, temos que $f'(x)<0$ em todo seu domínio. A função é sempre decrescente.

iv) Valores de máximo e de mínimo locais

A função f é derivável em todo seu domínio e a derivada $f'(x) = -\dfrac{1+x^2}{(x^2-1)^2}$ nunca se anula, logo não há máximos ou mínimos locais.

v) Concavidade e pontos de inflexão

Derivando f'

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-(1+x^2)}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-2x(x^2-1)^2+(x^2+1).2.(x^2-1).2x}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{-2x(x^2-1)\left(x^2-1-2(x^2+1)\right)}{(x^2-1)^4} \\ &= \frac{2x(x^2-1)(x^2+3)}{(x^2-1)^4}\ . \end{aligned}$$

Como $(x^2 + 3)$ e $(x^2 - 1)^4$ são sempre positivos (para $x \neq \pm 1$), então podemos considerar apenas os sinais de $2x (x^2 - 1)$. O estudo de sinais estão no quadro a seguir.

intervalo	$2x$	x^2-1	sinal de f''	concavidade
$x < -1$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0 < x < 1$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$x > 1$	$+$	$+$	$+$	para cima

Com relação aos pontos de inflexão, há várias mudanças de concavidade, mas $x = -1$ e em $x = 1$ não estão no domínio da função. O ponto $x = 0$ está no domínio de f e a concavidade muda em $x = 0$, logo f tem ponto de inflexão em $x = 0$.

vi) Esboço do gráfico

Usando as informações obtidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 3 a seguir. A interseção com o eixo y é o ponto $(0, f(0)) = (0,0)$ que é também ponto de inflexão da função.

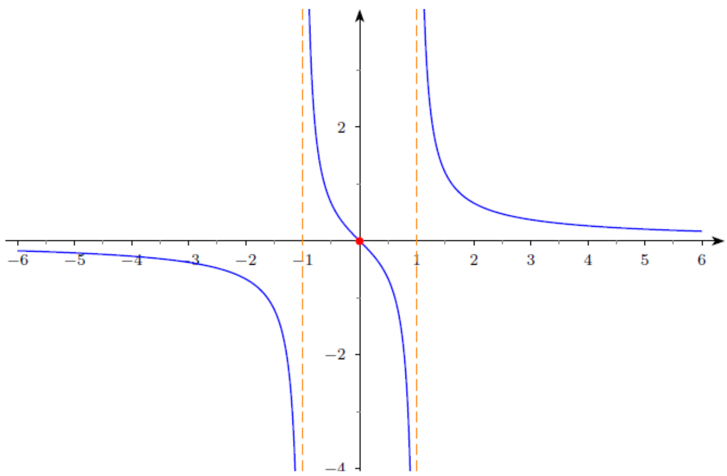


Figura 3

Exemplo 3:

Esboce o gráfico da função $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}}$. .

i) Domínio e continuidade de f

A função f está definida e é contínua em $\mathbb{R}$.

ii) Assíntotas verticais e horizontais

f é contínua então não possui assíntotas verticais. Para encontrar os limites no infinito, observamos que $f(x) = x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{4}{3}} = x^{\frac{1}{3}}(1+x)$. Logo,

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}} = \infty \text{ e } \lim_{x\to\infty}(1+x) = \infty \Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{3}}(1+x) = \infty\ .$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to-\infty}(1+x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{1}{3}}(1+x) = \infty\ .$$

Portanto, o gráfico de f não possui assíntotas horizontais.

iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

Temos que $\left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}$, logo $x^{\frac{4}{3}}$ é derivável para todo $x \in \mathbb{R}$. Mas $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$, o que mostra que $x^{\frac{1}{3}}$ não é derivável em $x = 0$. Portanto $f(x)$ não é derivável em $x = 0$ e para $x \neq 0$:

$$f'(x) = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right)\ .$$

Para o estudo de sinais de f' observe que $x^{\frac{1}{3}} > 0$ se $x > 0$ e $x^{\frac{1}{3}} < 0$ se $x < 0$. Quanto aos sinais de $4+\frac{1}{x}$, temos que $4+\frac{1}{x} = \frac{4x+1}{x}$. O numerador muda de sinal em $x = -\frac{1}{4}$ e o denominador em $x = 0$.

O estudo de sinais de $f'(x)$ está representado no quadro a seguir:

intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4x+1$	x	sinal de f'	f
$x < -\frac{1}{4}$	$-$	$-$	$-$	$-$	decrescente
$-\frac{1}{4} < x < 0$	$-$	$+$	$-$	$+$	crescente
$x > 0$	$+$	$+$	$+$	$+$	crescente

Vemos que f é decrescente em $(-\infty, -\frac{1}{4})$ e crescente em $(-\frac{1}{4}, 0) \cup (0, \infty)$.

iv) Valores de máximo e de mínimo locais

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{1}{4}\ .$$

Mas f não é derivável em $x = 0$, logo f' se anula apenas em $x = -\frac{1}{4}$. O teste da derivada primeira (ver quadro anterior quanto aos sinais de f') mostra que f tem mínimo local em $x = -\frac{1}{4}$ e não tem nem máximo nem mínimo local no ponto crítico $x = 0$.

v) Concavidade e pontos de inflexão

Derivando f'

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right)\right)' = \frac{1}{9}x^{-\frac{2}{3}}\left(4 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}}\left(-\frac{1}{x^2}\right) \\ &= \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{9}x^{-\frac{5}{3}} - \frac{1}{3}x^{-\frac{5}{3}} = \frac{4}{9}x^{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\ &= \frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}}\left(2 - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Como $x^{-\frac{2}{3}} > 0$ para todo $x \neq 0$ então o sinal de f'' é o sinal de $2 - \frac{1}{x}$. Quanto aos sinais de $2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$:

intervalo	$2x-1$	x	sinal de f''	concavidade
$x < 0$	$-$	$-$	$+$	para cima
$0 < x < \frac{1}{2}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$x > \frac{1}{2}$	$+$	$+$	$+$	para cima

Portanto, a função tem concavidade para cima em $(-\infty, 0) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ e concavidade para baixo em $(0, \frac{1}{2})$.

Há uma mudança de concavidade em $x = \frac{1}{2}$ e em $x = 0$ que são, portanto, os pontos de inflexão.

vi) Esboço do gráfico

Usando as informações obtidas nos itens anteriores, esboçamos o gráfico na Figura 4 a seguir. O gráfico de f corta o eixo y no ponto (0,0) e corta o eixo x em $f(x) = x^{\frac{1}{3}}(1 + x) = 0 \rightarrow x = 0 \; ou \; x = -1$. Representamos no gráfico o ponto de mínimo em azul e os pontos de inflexão em vermelho.

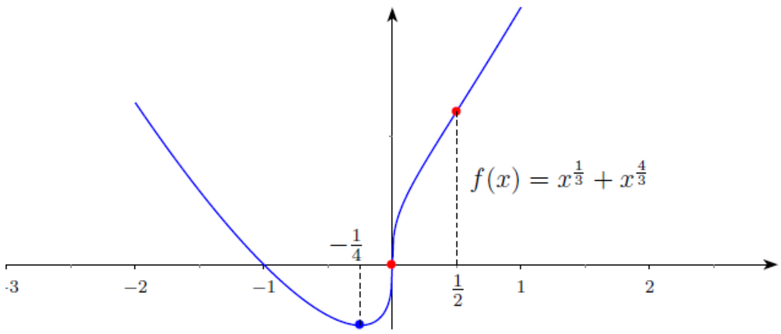


Figura 4

Exemplo 4:

Esboce o gráfico da função f(x) = sen 2x + 2 cos x :

i) Domínio e continuidade de f

A função f está definida e é contínua em $\mathbb{R}$. É interessante observar também que a função é periódica com período igual a 2π.

ii) Assíntotas verticais e horizontais

A função não possui assíntotas verticais ou horizontais. Não existem os limites

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{sen} 2x + 2\cos x \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} \operatorname{sen} 2x + 2\cos x \; .$$

A função repete indefinidamente o padrão que possui entre 0 e 2π.

iii) Derivabilidade e intervalos de crescimento e decrescimento.

A função é derivável em todo ponto

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\operatorname{sen} 2x + 2\cos x)' = 2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x \\ &= 2(1 - 2\operatorname{sen}^2 x) - 2\operatorname{sen} x = -2(2\operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 1) \; , \end{aligned}$$

em que usamos a relação trigonométrica cos 2x = 1 – 2 sen²x.

Para o estudo de sinais, dada a periodicidade da função, vamos nos restringir ao intervalo (0, 2π).

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x + 1 = 0 \text{ ou } 2\operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = -1 \text{ ou } \operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$$

Mas $\operatorname{sen} x = -1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ e $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi,$ $k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Portanto, os pontos críticos são os pontos $x = \frac{\pi}{6}$, $x = \frac{5\pi}{6}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

$\operatorname{sen} x + 1 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $2\operatorname{sen} x - 1$ será positiva para

$$\operatorname{sen} x > \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6} \ .$$

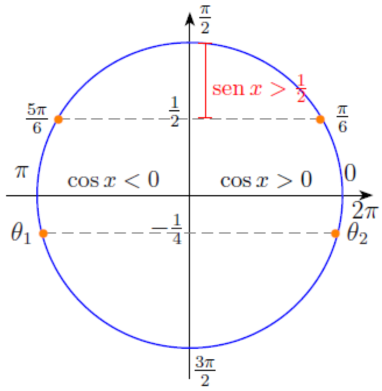


Figura 5

Reunindo as informações sobre os sinais de f'(x) = – 2(senx + 1)(2senx – 1)

intervalo	$-2(\operatorname{sen} x + 1)$	$2\operatorname{sen} x - 1$	sinal de f'	f
$0 < x < \frac{\pi}{6}$	$-$	$-$	$+$	crescente
$\frac{\pi}{6} < x < \frac{5\pi}{6}$	$-$	$+$	$-$	decrescente
$\frac{5\pi}{6} < x < \frac{3\pi}{2}$	$-$	$-$	$+$	crescente
$\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$	$-$	$-$	$+$	crescente

iv) Valores de máximo e de mínimo locais

Pelo teste da derivada primeira, olhando o quadro acima, concluímos que $x = \frac{\pi}{6}$ é máximo local, $x = \frac{5\pi}{6}$ é mínimo local e $x = \frac{3\pi}{2}$ não é máximo nem mínimo local.

v) Concavidade e pontos de inflexão

Derivando f', obtemos:

$$f''(x) = (2\cos 2x - 2\operatorname{sen} x)' = -4\operatorname{sen} 2x - 2\cos x = -2\cos x(4\operatorname{sen} x + 1)\ .$$

Para o estudo dos sinais, observe que $\cos x > 0$ em $\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right)$ e $\cos x < 0$ em $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$.

Com relação ao fator 4 senx + 1, existem dois valores θ_1 e θ_2 no intervalo (0, 2π) cujo seno é $-\frac{1}{4}$ (ver Figura 5).

Segue que 4 senx + 1 > 0 => senx > $-\frac{1}{4}$ ocorre para x ϵ (0, θ_1) U (θ_2, 2π) e 4 senx + 1 < 0 => senx < $-\frac{1}{4}$ para x ϵ (θ_1,θ_2). Logo

intervalo	$-2\cos x$	$4\operatorname{sen} x + 1$	sinal de f''	concavidade
$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$-$	$+$	$-$	para baixo
$\frac{\pi}{2} < x < \theta_1$	$+$	$+$	$+$	para cima
$\theta_1 < x < \frac{3\pi}{2}$	$+$	$-$	$-$	para baixo
$\frac{3\pi}{2} < x < \theta_2$	$-$	$-$	$+$	para cima
$\theta_2 < x < 2\pi$	$-$	$+$	$-$	para baixo

Há mudança de concavidade nos pontos $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \theta_1$, $x = \frac{3\pi}{2}$ e $x = \theta_2$, que são os pontos de inflexão.

vi) Esboço do gráfico

Basta fazer o esboço no intervalo [0,2π] e usar o fato de que a função f(x) = sen2x + 2cosx é periódica de período 2π, ou seja, basta fazer a translação do gráfico de um valor 2π, à direita e à esquerda, indefinidamente.

Temos que $f(0) = f(2\pi) = 2$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \approx 2{,}6$, $f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \approx -2{,}6$ e $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 0$.

Segue o esboço do gráfico. Os pontos de máximo e mínimo locais no intervalo (0, 2π) estão marcados em azul e os pontos de inflexão no mesmo intervalo estão marcados em vermelho.

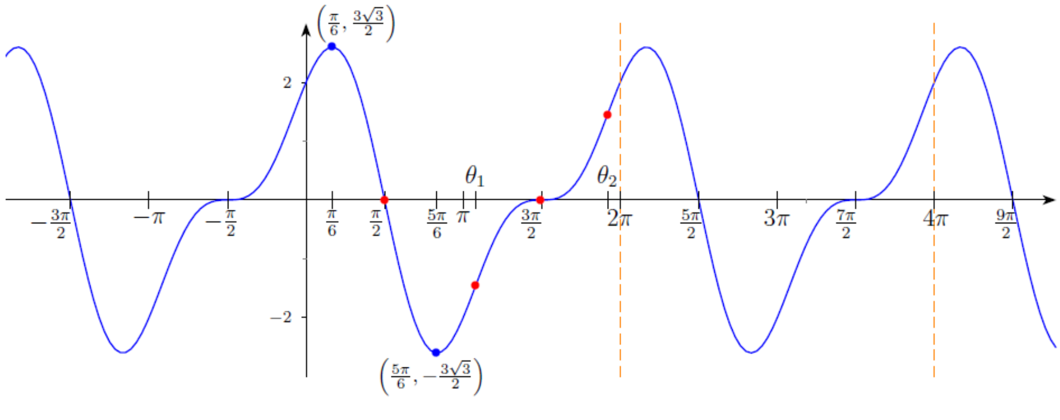


Figura 6

3.6 - Formas Indeterminadas e a Regra de L' Hôpital

3.6.1- Introdução

Alguns limites do tipo $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ são bem determinados a partir dos valores de $\lim_{x\to a} f(x)$ e de $\lim_{x\to a} g(x)$.

Por exemplo, com as propriedades de limites que estudamos, sabemos que L, M ϵ $\mathbb{R}$ – { 0 } e

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M, \quad \text{então} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ .$$

Alguns limites de quocientes de funções cujos limites são iguais a 0 (zero) ou $\pm\infty$ também são determinados. Por exemplo, M ϵ $\mathbb{R}$ – { 0 }

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a} g(x) = M \quad \text{então} \quad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

E se f(x) é limitada,

$$\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0\ .$$

No entanto, alguns limites de quocientes de funções não podem ser determinados apenas com o conhecimento do limite de cada função.

Exemplos:

Sejam $f(x) = x^2, g(x) = x^4\ e\ h(x) = 2x^2$ então:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} h(x) = 0$$

Mas, observe os seguintes limites de quocientes dessas funções:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^4} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2}$$

Dizemos que o limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ para funções $f(x)$ e $g(x)$ tais que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$ é uma *forma indeterminada do tipo* $\frac{0}{0}$

Portanto, se $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ não há como dizer o valor de $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ somente sabendo-se que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$. O limite $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ pode ser um valor real qualquer ou pode não existir. Existem outras formas indeterminadas além de $\frac{0}{0}$.

$$0^0, \quad 1^{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad 0 \cdot \infty \quad \text{e} \quad \infty^0 .$$

3.6.2- Regra de L' Hôpital

A Regra de L'Hôpital recebeu este nome em homenagem ao Matemático francês Guillaume François Antoine L'Hôpital (1661–1704), o Marquês de L'Hôpital.

O Marquês era de família nobre e, após abandonar uma carreira militar por problemas de visão, dedicou-se à Matemática, tendo sido autor de trabalhos interessantes em Cálculo e a publicação de algumas obras importantes.

Essa regra não foi descoberta por ele, mas apareceu pela primeira vez em sua obra Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes (Cálculo infinitesimal para o entendimento das linhas curvas), publicada em 1696, que teve grande importância histórica por ter sido a primeira apresentação sistemática do Cálculo Diferencial.

L'Hôpital deu crédito ao matemático Johann Bernoulli pelos resultados matemáticos no livro e, não desejando ele mesmo receber crédito pelas descobertas, publicou a primeira edição anonimamente.

A Regra de L'Hôpital é um método para solução de formas indeterminadas dos tipos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ por meio de transformações algébricas simples.

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

O mesmo vale se a for substituído por a^+, a^-, ∞ e $-\infty$, ou seja, o mesmo vale para limites laterais e limites no infinito. No caso de limites no infinito o intervalo I deve ser do tipo (b,∞) para $x \to \infty$ e do tipo $(-\infty, b)$ para $x \to -\infty$).

Para provar A Regra de L´Hôpital, precisaremos do seguinte resultado, que estende o Teorema do valor médio.

Sejam f e g funções contínuas em um intervalo $[a,b]$ e deriváveis em (a,b). Se $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ .$$

O Teorema estende o Teorema do valor médio porque se f segue as condições do teorema acima e fizermos $g(x) = x$, então $g'(x) = 1$ e a conclusão do teorema é exatamente a conclusão do Teorema do valor médio.

Demonstração:

Para demonstrar o teorema, inicialmente observe que se $g(b) = g(a)$, então, pelo teorema de Rolle, deve haver $c \in (a,b)$ tal que $g'(c) = 0$, o que contraria as hipóteses do teorema. Portanto, $g(b) \neq g(a)$.

Seja agora h a função definida em $[a,b]$ por

$$h(x) = (f(b) - f(a))\, g(x) - (g(b) - g(a))\, f(x) \ .$$

Claramente h é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b) (pois f e g o são) e $h'(x) = (f(b) - f(a))\, g'(x) - (g(b) - g(a))\, f'(x)$. Mas

$$h(a) = (f(b) - f(a))\, g(a) - (g(b) - g(a))\, f(a) = f(b)g(a) - f(a)g(b) \quad \text{e}$$
$$h(b) = (f(b) - f(a))\, g(b) - (g(b) - g(a))\, f(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$$

Logo, $h(a) = h(b)$. Aplicando o teorema de Rolle à função h concluímos que existe $c \in (a, b)$ tal que $h'(c) = 0$. Portanto,

$$h'(c) = (f(b) - f(a))\, g'(c) - (g(b) - g(a))\, f'(c) = 0$$

Levando em conta que $g'(c) \neq 0$ por hipótese e que $g(b) - g(a) \neq 0$, resulta que

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \ ,$$

o que conclui a demonstração.

Demonstração da Regra de L'Hôpital

Inicialmente, faremos a demonstração para limites laterais à direita $x \to a^+$. A demonstração para limites laterais à esquerda é análoga e, tendo demonstrado os dois limites laterais, fica demonstrado o caso $x \to a$.

Suponha então que $\lim_{x\to a^+} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a^+} g(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista. Provaremos que

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \ .$$

Considere as funções F e G definida em I por

$$F(x) = \begin{cases} f(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases} \quad \text{e} \quad G(x) = \begin{cases} g(x) \text{ se } x \neq a \\ 0 \text{ se } x = a \end{cases} \ .$$

Seja $x \in I$, com $x > a$. Como f e g são deriváveis em $I \setminus \{a\}$, então F e G são deriváveis no intervalo $(a, x]$ e, portanto, contínuas em $(a, x]$. Mas F e G também são contínuas em a, pois

$$\lim_{x\to a^+} F(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 0 = F(a) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to a^+} G(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0 = G(a)$$

Assim, F e G são contínuas em $[a, x]$, deriváveis em (a, x) e vale que $G'(x) \neq 0$ em (a, b) (pois o mesmo vale para g, por hipótese). Portanto, atendem às condições do valor médio de Cauchy e existe um $c_x \in (a, x)$ tal que

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c_x)}{G'(c_x)} \ .$$

Mas $F(a) = G(a) = 0$, $F'(c_x) = f'(c_x)$ e $G'(c_x) = g'(c_x)$ para $c_x \in (a, x)$. Portanto,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \ . \qquad (\text{I})$$

Fazendo agora o limite quando $x \to a^+$ na equação (I), como $c_x \in (a, x)$, temos que $c_x \to a^+$, o que resulta em

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{c_x\to a^+}\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

o que conclui a prova para o limite lateral à direita $x \to a^+$. A prova para o limite lateral à esquerda é análoga e podemos assim considerar provado o caso dos limites $x \to a^+$, $x \to a^-$ e $x \to a$.

Provaremos agora a Regra de L'Hôpital para limites no infinito $x \to \pm\infty$. Faremos para o caso $x \to \infty$. A prova do caso $x \to -\infty$ é análoga.

Sejam f e g funções deriváveis em intervalo (b, ∞) tais que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in (b, \infty)$ e suponha que exista $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$. Provaremos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Fazendo $t = \frac{1}{x}$ para $x > b$, temos $0 < t < \frac{1}{b}$ para $b < x < \infty$ e $t \to 0^+$ se $x \to \infty$. A ideia da demonstração é usar a mudança de variável $t = \frac{1}{x}$ para reduzir ao caso já provado da Regra de L'Hôpital.

Sejam as funções $F, G\colon \left(0, \frac{1}{b}\right) \to \mathbb{R}$ definidas por

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right) .$$

Então

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0^+} G(t) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Pela regra da cadeia, f e G são deriváveis em $\left(0, \frac{1}{b}\right)$ e

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) .$$

Aplicando a parte que já provamos da Regra de L'Hôpital, temos que

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} .$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{g\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{F'(t)}{G'(t)} \\
&= \lim_{t\to 0^+}\frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} ,
\end{aligned}$$

o que completa a demonstração do teorema.

Exemplo 1:

Usando a Regra de L'Hôpital, calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução: Como $\lim_{x\to 0} senx = 0$ e $\lim_{x\to 0} x = 0$, então o limite é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$.

Usando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} x)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos 0 = 1 \; .$$

Exemplo 2:

Calcule $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2x^2+x-3}$.

Solução:

Como $\lim_{x\to 1} x^2+x-2 = 0$ e $\lim_{x\to 1} 2x^2+x-3 = 0$, o limite pedido é do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{2x^2+x-3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2+x-2)'}{(2x^2+x-3)'} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{4x+1} = \frac{3}{5} \; .$$

Este último limite poderia também ter sido calculado diretamente fatorando numerador e denominador e cancelando o termo comum.

Exemplo 3:

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x^3}$.

Solução:

Como $\lim_{x\to 0}(x - \operatorname{sen} x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{(x - \operatorname{sen} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} \; .$$

Mas $\lim_{x\to 0}(1-\cos x) = 0$ e $\lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$, logo caímos em outra forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital uma segunda vez, resulta

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{6x} = \frac{1}{6} \; ,$$

em que usamos o limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$.

Exemplo 4:

Calcule o $\lim_{x\to 0} \dfrac{3\sin x - \sin 2x}{x - \sin x}$.

Solução:

O limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolvê-lo aplicamos a Regra de L'Hôpital três vezes:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{3\sin x - \sin 2x}{x - \sin x} &= \lim_{x\to 0} \frac{3\cos x - 2\cos 2x}{1 - \cos x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin x + 4\sin 2x}{\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-3\cos x + 8\cos 2x}{\cos x} \\
&= \frac{-3+8}{1} = 5
\end{aligned}$$

Exemplo 5:

Calcule o limite $\lim_{|x|\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x}$.

Solução:

Como $x \operatorname{sen} \frac{1}{x} = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$ e vale que $\lim_{|x|\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = 0$, estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$.

Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{|x|\to\infty} \frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{|x|\to\infty} \cos\frac{1}{x} = \cos \lim_{|x|\to\infty} \frac{1}{x} = \cos 0 = 1$$

Outra possibilidade seria fazer a substituição $t = \frac{1}{x}$ antes de aplicar a Regra de L'Hôpital, lembrando que se $|x| \to \infty$ então $t \to 0$.

$$\lim_{|x|\to\infty} x \operatorname{sen}\frac{1}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\operatorname{sen} t = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1 \ .$$

Exemplo 6:

Calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx}$, em que $p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Solução:

Como $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} px = 0$ e $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} qx = 0$, o limite é uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} px}{\operatorname{sen} qx} = \lim_{x\to 0} \frac{(\operatorname{sen} px)'}{(\operatorname{sen} qx)'} = \lim_{x\to 0} \frac{p\cos px}{q\cos qx} = \frac{p}{q} \ .$$

3.6.3- Indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, dizemos que o limite $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ é uma forma indeterminada do tipo $\frac{\infty}{\infty}$.

Há uma versão da Regra de L'Hôpital que vale para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

Sejam f e g funções deriváveis em um intervalo aberto I, exceto possivelmente em um ponto $a \in I$. Se $\lim_{x\to a} |f(x)| = \infty$, $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$, $g'(x) \neq 0$ para $x \in I \setminus \{a\}$ e $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe então

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

O mesmo vale para os limites laterais, para limites no infinito e no caso em que $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$.

Exemplo:

Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+2}$.

Solução:

Trata-se de uma forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3x-1}{3x^2-2x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4x+3}{6x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

3.6.4- Outras Formas Indeterminadas

Podemos utilizar a Regra de L'Hôpital para resolver outras indeterminações se transformando-as em indeterminações da forma $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x)$ é uma indeterminação da forma $0\cdot\infty$. Fazendo

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \lim_{x\to a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

reduzimos aos casos $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$, o que for mais conveniente para a solução do exercício.

Exemplo 1:

Calcule o limite $\lim\limits_{x\to\infty} x\tan\dfrac{1}{x}$.

Solução:

Pela continuidade da função tangente, $\lim_{x\to\infty} \tan\frac{1}{x} = \tan\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \tan 0 = 0$. Portanto, $\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x}$ é uma forma indeterminada do tipo $0\cdot\infty$. Uma solução é a seguinte:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} x\tan\frac{1}{x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\tan\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\sec^2\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\\
&= \lim_{x\to\infty}\sec^2\frac{1}{x} = \sec^2 0 = 1\ .
\end{aligned}$$

Em que transformamos o limite dado em uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$ e aplicamos a Regra de L'Hôpital.

Se $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$ então $\lim_{x\to a} f(x) - g(x)$ é uma indeterminação da forma $\infty - \infty$. Fazendo

$$\lim_{x\to a} f(x) - g(x) = \lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)g(x)}}$$

reduzimos ao caso $\frac{0}{0}$.

Exemplo 2:

Calcule o limite $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x}\right)$.

Solução:

Como $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\operatorname{sen} x} = \infty$ e $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$, temos uma forma indeterminada do tipo $\infty - \infty$. Mas

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x}$$

que é uma forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Aplicando a Regra de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+}\frac{x - \operatorname{sen} x}{x\operatorname{sen} x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x + x\cos x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \cos x - x\operatorname{sen} x}\\
&= \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{2\cos x - x\operatorname{sen} x} = \frac{0}{2} = 0\ .
\end{aligned}$$

Observe que aplicamos a Regra de L'Hôpital duas vezes no desenvolvimento acima.

3.6.5- Aproximações por Polinômios

A Série de Taylor de uma função fornece uma aproximação da função por meio de polinômios.

A expressão de uma função como soma infinita de monômios é utilizada por matemáticos desde muito antes da invenção do Cálculo. Existem evidências de que o matemático indiano Madhava de Sangramagrama (1350 – 1425) descobriu a série que representa senx para resolver problemas de Astronomia.

No século XVII, o matemático escocês James Gregory (1638 – 1675), formulou a expansão em série das funções senx, cosx, arcsenx e arccosx, publicando essa descoberta em 1667.

Embora Gregory tivesse obtido algumas séries particulares, foi o matemático inglês Brook Taylor (1685 – 1731) o primeiro a apresentar uma fórmula geral para a construção de séries de potências de funções, publicando o método em seu trabalho Methodus Incrementorum Directa et Inversa de 1715.

Na fórmula de Taylor lidamos com a n – ésima derivada de f, denotada $f^{(n)}$. Seja f uma função definida em um intervalo aberto I. Dizemos que f é n vezes derivável no ponto a ϵ I se f é (n – 1) vezes derivável em uma vizinhança de a e $f^{(n-1)}$ é derivável em a. Denota-se por $f^{(0)}$ a própria função f, ou seja, f é sua derivada de ordem zero.

3.6.6- Polinômios de Taylor

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ definida no intervalo aberto I e n vezes derivável em $a \in I$. O *polinômio de Taylor de ordem* n *de* f *em* a é o polinômio

$$p(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n$$

tal que as derivadas de ordem $k \leq n$ de $p(x)$ em $x = a$ coincidem com as derivadas de mesma ordem de $f(x)$ em $x = a$

Podemos determinar facilmente os coeficientes do Polinômio de Taylor em função das derivadas de f:

Como

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + \cdots + c_n(x-a)^n \ ,$$

substituindo x por a, temos

$$f(a) = c_0 \ .$$

Derivando f, obtemos:

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} \ ,$$

o que mostra que

$$c_1 = f'(a) = \frac{f'(a)}{1!} \ .$$

Se $n > 1$, podemos derivar novamente a série para obter

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2(x-a) + 4 \cdot 3(x-a)^2 + + \cdots + n(n-1)c_n(x-a)^{n-2} \ ,$$

O que mostra que

$$f''(a) = 2c_2 \Rightarrow c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \ .$$

Derivando mais uma vez e substituindo $x = a$:

$$f'''(a) = 3 \cdot 2c_3 \Rightarrow c_3 = \frac{f'''(a)}{3!} \ .$$

Derivando sucessivamente, obtemos o valor dos coeficientes:

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad \text{para } k \leq n \ .$$

O Teorema de Taylor, que veremos nesta seção, mostra que uma função f n vezes derivável em $x = a$, o polinômio de Taylor $p(x)$ é uma boa aproximação de $f(x)$ próximo a a. Mas o isso quer dizer exatamente?

Seja $r(x) = f(x) - p(x)$, a diferença entre a função e seu polinômio de Taylor em a. Então $r\colon I \to \mathbb{R}$ é n vezes diferenciável em a e, como $f(x)$ e $p(x)$ têm as mesmas derivadas de ordem k para $k \leq n$ resulta

$$r(a) = r'(a) = r''(a) = \cdots = r^{(n)}(a) = 0 \ .$$

A próxima proposição mostra que isto equivale a $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Seja $r\colon I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. Então $r^{(k)}(a) =$ para $0 \leq k \leq n$ se, e somente se

$$\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0 \ .$$

A proposição mostra que a diferença de uma função n vezes derivável em a e seu polinômio de Taylor de ordem n em a não só vai a zero como, por assim dizer, vai a zero "mais rápido" que $(x-a)^n$.

Finalmente, podemos formular o Teorema de Taylor:

Teorema de Taylor

Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função n vezes derivável em $a \in I$. A função $r: I \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r(x) \ ,$$

satisfaz $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $p(x)$ é um polinômio de grau $\leq n$ tal que $r(x) = f(x) - p(x)$ satisfaz $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$ então $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a.

Demonstração:

Como vimos, a função $r(x)$ definida pela diferença de $f(x)$ e o polinômio de Taylor $p(x)$ satisfaz $r^{(k)}(a) = 0$ para $0 \leq k \leq n$. Logo, pela proposição 17, $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$.

Reciprocamente, se $r(x) = f(x) - p(x)$ é tal que $\lim_{x\to a} \frac{r(x)}{(x-a)^n} = 0$, então, pela proposição 17, as derivadas de ordem k, $0 \leq k \leq n$ de $r(x)$ se anulam em $x = a$. Portanto, $p^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$ em $x = a$ para $0 \leq k \leq n$, ou seja, $p(x)$ é o polinômio de Taylor de ordem n de f em a.

Exemplo:

Encontre os polinômios de Taylor da função $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ em $x = 0$.

Solução:

As derivadas de $f(x)$ são:

$$f'(x) = \left((1-x)^{-1}\right)' = -1(1-x)^{-2}(-1) = (1-x)^{-2} \; .$$
$$f''(x) = \left((1-x)^{-2}\right)' = -2(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \; .$$
$$f'''(x) = \left(2(1-x)^{-3}\right)' = -2\cdot 3(1-x)^{-4}(-1) = 2\cdot 3(1-x)^{-4} \; .$$

É fácil ver que a $k-$ésima derivada de $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ para $x \neq 1$ é

$$f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}} \; .$$

Resulta que o $k-$ésimo coeficiente do polinômio de Taylor em $x = 0$ é

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{\frac{k!}{(1-0)^{k+1}}}{k!} = 1 \; .$$

O $k-$ésimo polinômio de Taylor em $x = 0$ é o polinômio

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^k \; .$$

Observe que $p(x)$ é a soma dos $k+1$ primeiros termos da progressão geométrica (PG) de termo inicial 1 e razão x. Se $0 < x < 1$, então a soma dos termos da PG infinita é

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x} \; .$$

Estimativa da Função Resto

A função $r(x) = f(x) - p(x)$, que é a diferença entre a função $f(x)$ e seu polinômio de Taylor de ordem n em um ponto $x = a$, é comumente chamada de *resto da série de Taylor*. O Teorema 18 fornece uma informação sobre o limite de $r(x)$ quando $x \to a$, mas não permite estimar o valor de $r(x)$ para uma dada função f, ordem n e ponto $x = a$.

Sob hipóteses um pouco mais fortes do que as do Teorema de Taylor, podemos usar o Teorema do valor médio para obter uma informação sobre o valor de $r(x)$.

Fórmula de Taylor com Resto de Lagrange

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ função $n+1$ vezes derivável em $a \in I$. Dado $b \in I$ supondo que f seja $n+1$ vezes derivável no intervalo aberto e contínua no intervalo fechado entre a e b, então existe c entre a e b tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \frac{f''(a)}{2}(b-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}\,.$$

O termo

$$R_n(b) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

é chamada *forma de Lagrange* para o resto de Taylor. Há outras formas para o resto, como a forma de Cauchy e a forma integral do resto, que não serão discutidas aqui.

Demonstração da Fórmula de Taylor

Suponha que b>0 (o caso b < a é análogo). Seja a função g:[a,b]→$\mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - \frac{f^n(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{M}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$, em

que M ϵ $\mathbb{R}$ é escolhida de forma que g(a) = 0.

Temos que g(x) é contínua em [a.b] e derivável em (a,b). Além disso, g(a) = 0 (pela escolha de M) e, substituindo x = b na fórmula acima, vemos que g(b) = 0. Logo, podemos aplicar o Teorema de Rolle e concluir que existe um c ϵ (a,b) tal que g'(x) = 0. Mas a derivada de g(x) é

$$\begin{aligned} g'(x) &= -f'(x) - (f''(x)(b-x) - f'(x)) - \left(\frac{f'''(x)}{2}(b-x)^2 - f''(x)(b-x)\right) \\ &\quad - \cdots - \left(\frac{f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n - \frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!}(b-x)^{n-1}\right) + \frac{M}{n!}(b-x)^n \\ &= \frac{M - f^{(n+1)}(x)}{n!}(b-x)^n \end{aligned}$$

Como g'(x)=0 então M = $f^{(n+1)}(c)$. Substituindo x por a e lembrando que g(a) = 0, resulta em

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}$$

que é a fórmula que queríamos demonstrar.

Série de Taylor

Seja $f\colon I \to \mathbb{R}$ uma função infinitas vezes derivável em I e seja $a \in I$. A série infinita

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned}$$

é chamada *série de Taylor* da função f no ponto a.

A série de Taylor para x=0 também é chamada Série de Maclaurin.

Exemplo: Obtenha a série de Maclaurin da função f(x) = sen x.

Solução:

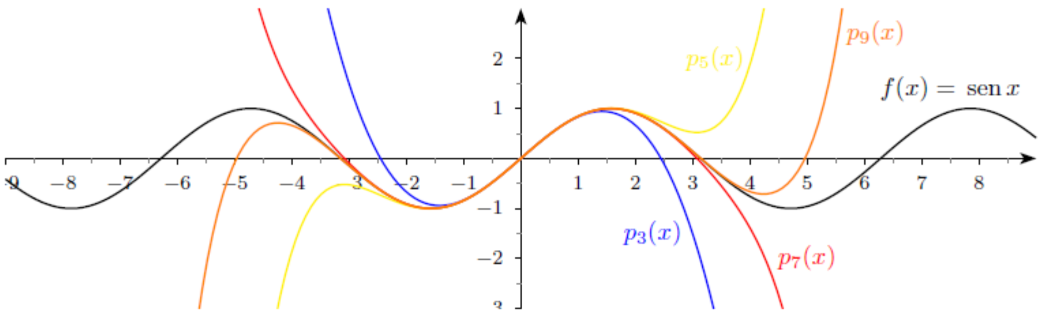
Obtendo as derivadas de $\operatorname{sen} x$ e avaliando em $x = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{sen} x & \qquad f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\operatorname{sen} x & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x & f'''(0) &= -1 \\ f^{(4)}(x) &= \operatorname{sen} x & f^{(4)}(0) &= 0 \end{aligned}$$

Derivando sucessivamente, vemos que os valores da derivada se repetem em ciclos de período 4, de tal forma que $f^{(n)}(0) = 0$ para n é par e $f^{(n)}(0)$ alterna os valores 1 e -1 para n ímpar. Portanto, a série de Maclaurin da função $f(x) = \operatorname{sen} x$ é

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

A figura a seguir mostra como os polinômios de Taylor se aproximam cada vez mais da curva $y = \operatorname{sen} x$ próximo à origem. No gráfico temos $f(x) = \operatorname{sen} x$ (em preto), $p_3(x) = x - \frac{x^3}{6}$ (em azul), $p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ (em amarelo), $p_7(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}$ (em vermelho) e $p_9(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \frac{x^9}{362880}$ (em laranja).



3.7 - Problemas de Otimização

Os métodos estudados neste módulo para calcular valores extremos têm aplicações práticas em muitas áreas do dia a dia. Uma empresa quer minimizar os custos e maximizar os lucros. Um viajante quer minimizar o tempo de transporte. Neste item vamos resolver problemas tais como maximizar as áreas, os volumes, os lucros, etc. e minimizar as distâncias, o tempo, os custos, etc.

Passos na Solução de Problemas de Otimização

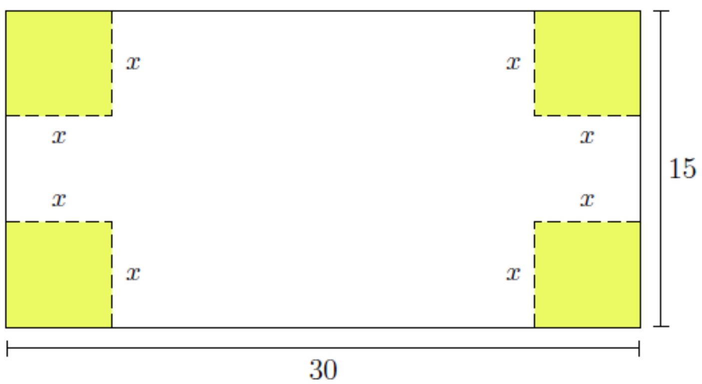
1. Compreendendo o problema – A primeira etapa consiste em ler cuidadosamente o problema até que ele seja claramente compreendido. Pergunte a si mesmo: O que é desconhecido? Quais são as quantidades dadas? Quais são as condições dadas?

2. Identificamos as variáveis do problema, isto é, quais grandezas representam a situação descrita no problema. O desenho de gráficos e diagramas pode ser útil para isso.
3. Identificamos os intervalos de valores possíveis para as variáveis. São os valores para os quais o problema tem sentido físico.
4. Descrevemos as relações entres estas variáveis por meio de uma ou mais equações. Em geral, uma destas equações dará a grandeza que queremos otimizar, isto é encontrar seu máximo ou mínimo. Se há mais de uma variável no problema, substituindo uma ou mais equações naquela principal permitirá descrever a grandeza que queremos otimizar em função de uma só variável.
5. Usando a primeira e segunda derivada da função que queremos otimizar, encontramos seus pontos críticos e determinamos aquele(s) que resolve(m) o problema. Neste ponto é importante estar atento para o fato de que alguns dos pontos críticos da função podem estar fora do intervalo de valores possíveis para a variável (item 3) e devem ser desprezados.

Exemplo 1:

Uma caixa retangular aberta deve ser fabricada com uma folha de papelão de 15 x 30 cm, recortando quadrados nos quatro cantos e depois dobrando a folha nas linhas determinadas pelos cortes. Existe alguma medida do corte que produza uma caixa com volume máximo?

Seja x o lado do quadrado que é cortado nos cantos da caixa.



Solução:

A caixa terá como base um retângulo de lados $30 - 2x$ e $15 - 2x$ e altura x.

Seu volume é dado por

$$V(x) = x(30-2x)(15-2x) = 4x^3 - 90x^2 + 450x \ ,$$

observando que devemos ter $0 < x < \frac{15}{2}$ para que seja possível fazer o corte do retângulo.

Derivando, temos:

$$V'(x) = 12x^2 - 180x + 450 \quad \text{e} \quad V''(x) = 24x - 180 \ .$$

Os pontos críticos de $V(x)$ são $V'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 180x + 450 = 0 \Rightarrow x = \frac{15 \pm 5\sqrt{3}}{2}$. São dois pontos críticos: $x_1 = \frac{15+5\sqrt{3}}{2} \approx 11{,}8$ e $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}2$. O primeiro valor deve ser desprezado por estar fora do intervalo $(0, \frac{15}{2})$.

Usando o teste da derivada segunda no ponto crítico x_2, temos

$$V''(x_2) = 24x_2 - 180 \approx -103{,}9 < 0 \ ,$$

o que mostra que o ponto é de máximo.

Portanto, obteremos uma caixa de volume máximo para um corte quadrado de lado $x_2 = \frac{15-5\sqrt{3}}{2} \approx 3{,}2$.

Exemplo 2:

Encontre dois números não negativos cuja soma é 30 e tal que o produto de um dos números e o quadrado do outro é máximo.

Solução:

Sejam x e y os números. Então $x+y = 30$ e queremos maximizar $P = xy^2$. Devemos ter $0 < x, y < 30$ para que os números sejam não negativos.

Escrevendo $y = 30 - x$, obtemos $P(x) = x(30-x)^2 = x^3 - 60x^2 + 900x$.

As derivadas de $P(x)$ são

$$P'(x) = 3x^2 - 120x + 900 \quad \text{e} \quad P''(x) = 6x - 120 \ .$$

Os pontos críticos são

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 120x + 900 = 0 \Rightarrow x = 10 \quad \text{ou} \quad x = 30 \ .$$

Como a solução $x = 30$ deve ser desprezada, resta $x = 10$. Usando o teste da derivada segunda, $P''(10) = 6 \cdot 10 - 120 = -60 < 0$, mostra que $P = xy^2$ é máximo para $x = 10$.

Exemplo 3:

Um reservatório de água tem o formato de um cilindro sem a tampa superior e tem uma superfície total de 36π m². Encontre os valores da altura h e raio da base r que maximizam a capacidade do reservatório.

Solução:

O volume de um cilindro é dado pelo produto da área da base pela altura. Logo, $V = \pi r^2 h$. A superfície lateral do cilindro é $S = 2\pi r h$ e a área da base é πr^2, logo

$$2\pi r h + \pi r^2 = 36\pi \Rightarrow h = \frac{36 - r^2}{2r} \ ,$$

o que resulta em

$$V = V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{36 - r^2}{2r} = \frac{\pi r(36 - r^2)}{2} \ .$$

Derivando $V(r)$, obtemos:

$$V'(r) = \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) \quad \text{e} \quad V''(r) = -3\pi r \ .$$

Os pontos críticos de V são

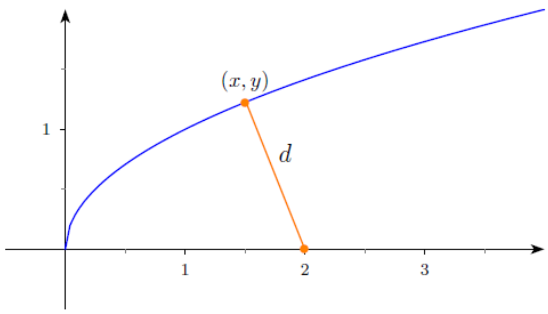
$$V'(r) = 0 \Rightarrow \frac{3\pi}{2}(12 - r^2) = 0 \Rightarrow r = 0 \quad \text{ou} \quad r = 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad r = -2\sqrt{3} \ .$$

Como somente valores positivos de r fazem sentido para o problema, nosso único candidato a solução é $r = 2\sqrt{3}$. Como $V''(r) < 0$ para $r > 0$, o teste da derivada segunda mostra que o volume é máximo para $r = 2\sqrt{3}$.

Exemplo 4:

Encontre o ponto (x,y) do gráfico da função $f(x) = \sqrt{x}$ mais próximo do ponto (2,0).

Solução:



A distância d entre o ponto (x, y) do gráfico de $y = \sqrt{x}$ e o ponto $(2, 0)$ é

$$d = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4} \ ,$$

em que substituímos $y = \sqrt{x}$ na equação. Devemos ter $x > 0$ para que o ponto (x, y) esteja no gráfico de $y = \sqrt{x}$.

Derivando a função $d = d(x)$, obtemos:

$$d'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} \quad \text{e} \quad d''(x) = \frac{7}{4(x^2-3x+4)^{\frac{3}{2}}} \; .$$

Há apenas um ponto crítico:

$$d'(x) = 0 \Rightarrow 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \; ,$$

e, como $x^2 - 3x + 4 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, então $d''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e o teste da derivada segunda mostra que $x = \frac{3}{2}$ é ponto de mínimo.

Exemplo 5:

Uma fazenda produz laranjas e ocupa uma certa área com 50 laranjeiras. Cada laranjeira produz 600 laranjas por ano. Verificou-se que para cada nova laranjeira plantada nesta área a produção por árvore diminui de 10 laranjas. Quantas laranjas devem ser plantadas no pomar de forma a maximizar a produção?

Solução:

Para x novas árvores plantadas, o número total de árvores passa a ser $50 + x$, mas a produção individual passa a ser de $600 - 10x$ laranjas por árvore, totalizando uma produção de $P(x) = (50 + x)(600 - 10x) = 30000 + 100x - 10x^2$ laranjas por ano na fazenda.

Devemos ter $x > 0$ (não se pode plantar um número negativo de árvores) e, como a produção não pode ser negativa, devemos ter $600 - 10x > 0 \Rightarrow x < 60$.

Derivando $P(x)$, obtemos:

$$P'(x) = 100 - 20x \quad \text{e} \quad P''(x) = -20 \; .$$

Portanto, há um ponto crítico em $100 - 20x = 0 \Rightarrow x = 5$. Este ponto será de máximo, pois $P''(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Portanto, deve-se plantar 5 novas árvores para maximizar a produção.

Exemplo 6:

Um fabricante de caixas de papelão deseja fazer caixas abertas a partir de pedaços de papelão de 12 cm² cortando quadrados iguais dos quatro cantos e dobrando os lados para cima. Queremos encontrar o comprimento do lado do quadrado a ser cortado para obter uma caixa com o maior volume possível. A Figura 1 representa um dado pedaço de papelão e a figura 2 representa a caixa. Se x cm for o comprimento do lado do quadrado a ser cortado e V(x) cm³ for o volume da caixa, então $V(x) = 144x - 48x^2 + 4x^3$ e o domínio de V será o intervalo fechado [0,6]. Como V é contínua em [0,6], segue do teorema do valor extremo que V tem um máximo absoluto nesse intervalo. Sabemos também que esse valor máximo absoluto precisa ocorrer num número crítico de V ou num extremo do intervalo.

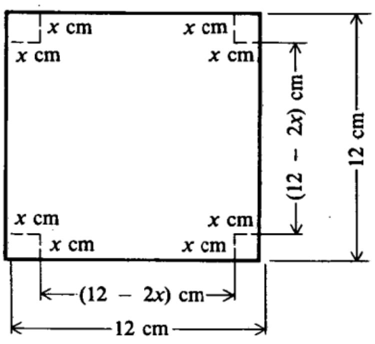


FIGURA 1

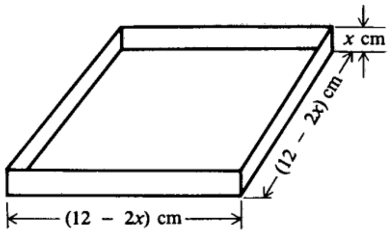


FIGURA 2

Solução:

Para encontrar os números críticos de V determinamos V'(x) e então encontramos os valores de x para os quais V'(x) = 0 ou V'(x) não existe.

$$V'(x) = 144 - 96x + 12x^2$$

$V'(x)$ existe para todos os valores de x. Se $V'(x) = 0$,

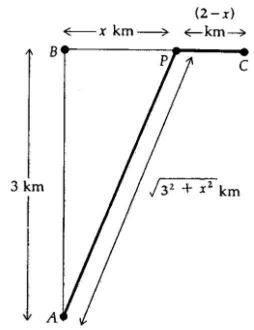
$$12(x^2 - 8x + 12) = 0$$

$$x = 6 \qquad x = 2$$

Os números críticos de V são 2 e 6, ambos pertencentes ao intervalo fechado [0.6]. O valor máximo absoluto de V em [0,6] precisa ocorrer num número crítico ou num extremo do intervalo. Como V(0) = 0 e V(6) = 0, enquanto V(2) = 128, o valor máximo absoluto de V em [0,6] é 128, ocorrendo quando x = 2. Logo, o maior volume possível é de 128 cm^3, obtido quando o comprimento do lado do quadrado a ser cortado é de 2 cm.

Exemplo 7:

Os pontos A e B estão em lados opostos de um rio reto com 3 km de largura. O ponto C está na mesma margem que B, mas 2 km rio abaixo. Uma companhia telefônica deseja estender um cabo de A até C. Se o custo por quilômetro do cabo é de 25% maior sob a água do que em terra, como deve ser estendido o cabo, de forma que o custo seja menor para a companhia?



Solução:

Seja P um ponto na mesma margem que B e C e entre B e C, de tal forma que o cabo será estendido de A para P e deste para C. Seja x km a distância de B até P. Logo, (2 – x) quilômetros será a distância de P até C e x ϵ [0,2]. Seja k o custo por quilômetro em terra e 5k/4 o custo por quilômetro sob a água (k é uma constante). Se C(x) for o custo total da ligação de A até P e de P até C, então

$$C(x) = \tfrac{5}{4}k\sqrt{3^2 + x^2} + k(2 - x)$$

Como C é contínua em [0,2], o teorema do valor extremo pode ser aplicado, assim, C tem ambos os valores, máximo e mínimo, absolutos, em [0,2]. Queremos encontrar o valor mínimo absoluto.

$$C'(x) = \frac{5kx}{4\sqrt{9 + x^2}} - k$$

C’(x) existe para todos os valores de x. Equacionando C’(x) = 0 e resolvendo em x, teremos

$$\frac{5kx}{4\sqrt{9 + x^2}} - k = 0$$

$$5x = 4\sqrt{9 + x^2}$$

$$25x^2 = 16(9 + x^2)$$

$$9x^2 = 16 \cdot 9$$

$$x^2 = 16$$

$$x = \pm 4$$

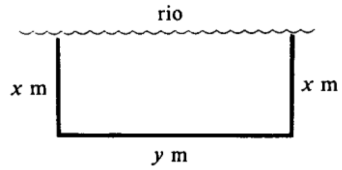
O número – 4 é uma raiz estranha da equação anterior e 4 não está no intervalo [0,2]. Logo, não existem números críticos de C em [0,2]. O valor mínimo absoluto de C em [0,2] deve, portanto, ocorrer num dos extremos do intervalo. Calculando C(0) e C(2), obtemos

$$C(0) = \frac{23}{4}k \qquad \text{e} \qquad C(2) = \frac{5}{4}k\sqrt{13}$$

Como $\frac{5}{4}k\sqrt{13} < \frac{23}{4}k$, o valor mínimo absoluto de C em [0, 2] é $\frac{5}{4}k\sqrt{13}$, ocorrendo quando $x = 2$. Logo, para minimizar o custo do cabo, devemos estendê-lo diretamente de A até C sob a água.

Exemplo 8:

Um campo retangular à margem de um rio deve ser cercado, com exceção do lado ao longo do rio. Se o custo do material for de R$12,00 por metro linear no lado paralelo ao rio e de R$8,00 por metro linear nos dois extremos, ache o campo de maior área possível que possa ser cercado com R$3600,00 de material.



Solução:

Seja x m o comprimento de cada extremo do campo, y m o comprimento do lado paralelo ao rio e A m² a área do campo. Logo, A = xy.(I)

Como o custo do material em cada extremo é de R$8,00 por metro linear e o comprimento de cada extremo é de x m, o custo total da cerca para cada extremo será de R$8 x. Analogamente, o custo total da cerca para o terceiro lado é de R$12 y. Então,

$$8x + 8x + 12y = 3.600 \qquad \text{(II)}$$

Para expressar A em termos de uma única variável, resolvemos a equação anterior obtendo y em termos x e substituindo em A = xy, obtendo A como uma função de x, e

$$A(x) = x\left(300 - \frac{4}{3}x\right) \qquad \text{(III)}$$

De (II), se y = 0, x = 225 e se x= 0, y = 300. Como x e y devem ser não-negativos, o valor de x que irá tornar A um máximo absoluto está no intervalo fechado [0,225]. Como A é contínua no intervalo fechado [0,225],do teorema do valor extremo, A terá um valor máximo absoluto nesse intervalo. De (III),

$$A(x) = 300x - \tfrac{4}{3}x^2$$
$$A'(x) = 300 - \tfrac{8}{3}x \qquad \text{(IV)}$$

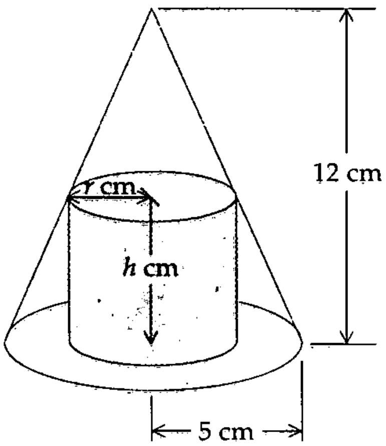
Como A'(x) existe para todo x, os números críticos de A são encontrados ao equacionarmos A'(x)=0, o que dá x = 112,5.

O único número crítico de A é 112,5, que está no intervalo fechado [0,225]. Assim. O valor máximo absoluto de A deve ocorrer em 0, 112,5 ou 225. Como A(0) = 0 e A(225) = 0, enquanto A(112,5) = 16 875, o valor máximo absoluto de A em [0,225] é 16,875, ocorrendo quando x = 112,5 e y= 150 (obtido de (II), substituindo x por 112,5).

Assim sendo, a maior área possível que poderá ser cercada com R$3600,00 de material será 16 875 m², e isso acontece quando o lado paralelo ao rio tiver 150 m e os extremos tiverem 112,5 m cada um.

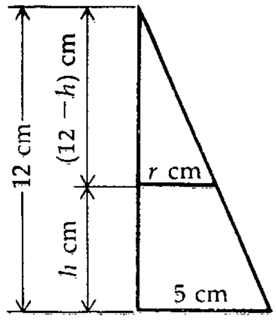
Exemplo 9:

Ache as dimensões do cilindro circular reto de maior volume que possa ser inscrito num cone circular reto com raio de 5 cm e 12 cm de altura.



Solução:

Seja r cm o raio do cilindro, h cm sua altura e V cm³ o seu volume. A figura acima ilustra o cilindro inscrito no cone e a figura abaixo mostra uma secção plana através do eixo do cone.



Se r =0 e h = 12, temos um cilindro degenerado que é o eixo do cone. Se r=5 e h=0, também temos um cilindro degenerado, que é o diâmetro da base do cone. O número r está no intervalo fechado [0,5] e h está no intervalo fechado [0,12].

A fórmula a seguir expressa V em termos de r e h: V = πr²h.

Para expressar V em termos de uma única variável, precisa-se de uma outra equação envolvendo e r h. Dos triângulos acima, usando semelhança de triângulos,

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{5}$$

$$h = \frac{60-12r}{5}$$

Substituindo esse valor de h em V = πr²h, iremos obter V como uma função de r e escrevemos

$$V(r) = \tfrac{12}{5}\pi(5r^2 - r^3) \qquad \textbf{com } r \textbf{ em } [0,\ 5]$$

Como V é contínua no intervalo fechado [0,5], segue do Teorema do Valor Extremo que V tem um valor máximo absoluto nesse intervalo. Os valores de r e h que acarretam esse valor máximo absoluto para V são os números que devem ser encontrados.

$$V'(r) = \tfrac{12}{5}\pi(10r - 3r^2)$$

Para encontrar os números críticos de V, equacionamos V'(r) = 0 e resolvemos em r:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0 \qquad r = \tfrac{10}{3}$$

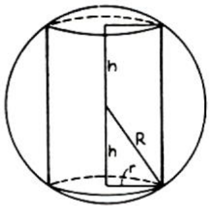
Como V'(r) existe para todos os valores de r, os únicos números críticos de V são 0 e $\frac{10}{3}$, ambos no intervalo fechado [0,5]. O valor máximo absoluto de V em [0,5] deve ocorrer em um dos números 0, $\frac{10}{3}$ ou 5. Substituindo na expressão V(r), obtemos

$$V(0) = 0 \qquad V(\tfrac{10}{3}) = \tfrac{400}{9}\pi \qquad V(5) = 0$$

Logo, o valor máximo absoluto de V é $\frac{400\pi}{9}$, ocorrendo quando $r = \frac{10}{3}$. Quando , $r = \frac{10}{3}$, decorre que h = 4. Assim sendo, o maior volume do cilindro inscrito no cone dado é $\frac{400\pi}{9}$ cm³ e teremos esse valor quando o raio for de $\frac{10}{3}$ cm e a altura for de 4 cm.

Exemplo 10:

Achar a altura do cilindro circular reto de volume V máximo que pode ser inscrito em uma esfera de raio R. Ver figura abaixo.



Solução:

Seja r o raio da base e 2h a altura do cilindro.

$$V = 2\pi r^2 h \qquad e \qquad r^2 + h^2 = R^2$$

Então,

$\dfrac{dV}{dr} = 2\pi\left(r^2\dfrac{dh}{dr} + 2rh\right)$ e $2r + 2h\dfrac{dh}{dr} = 0$. Da última relação, $\dfrac{dh}{dr} = -\dfrac{r}{h}$.

Logo:

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(-\frac{r^3}{h} + 2rh\right)$$

Como $r^2 + h^2 = R^2$

$$\Rightarrow 2h^2 + h^2 = R^2 \Rightarrow h = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

Quando V for máximo,

$$\frac{dV}{dr} = 2\pi\left(-\frac{r^3}{h} + 2rh\right) = 0 \Rightarrow r^2 = 2h^2$$

A altura do cilindro será

$$2h = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

3.8 - Aplicações em Economia

Exemplo 1:

A função custo mensal de fabricação de um produto é dada por $C(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1$ e a função de demanda mensal (p), do mesmo produto, é dada por p(x) = 10 – x. Qual é o preço de x que deve ser cobrado para maximizar o lucro?

Solução:

O lucro total é dado por

$Lucro(L) = \mathrm{Re}ceita(R) - Custo(C)$ e a receita será

$\mathrm{Re}ceita = p \cdot x$, assim $R = p \cdot x = (10 - x) \cdot x = 10x - x^2$. Logo,

$$L = R - C = 10x - x^2 - \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 10x + 1\right)$$

$$= 10x - x^2 - \frac{x^3}{3} + 2x^2 - 10x - 1,$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 - 1.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 2x \text{ e } L''(x) = -2x + 1.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 2x = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = 0$ e $x = 2$. Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = 0$, temos $L''(0) = -2 \cdot 0 + 1 = 1 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 2$, temos $L''(2) = -2 \cdot 2 + 1 = -3 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, o preço que deve ser cobrado para maximizar o lucro é $x = 2$.

Exemplo 2:

A empresa “Sempre Alerta” produz um determinado produto, com um custo mensal dado pela função $C(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20$. Cada unidade desse produto é vendida por R$31,00. Determinar a quantidade que deve ser produzida e vendida para dar o lucro mensal máximo.

Solução:

Seja x a quantidade a ser produzida e vendida para dar o lucro mensal máximo. O lucro mensal é dado por:

$$Lucro(L) = \mathrm{Re}\,ceita(R) - Custo(C),$$

Assim

$$L = R - C = 31x - \left(\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 10x + 20\right)$$

$$= 31x - \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 10x - 20$$

$$= -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20$$

ou ainda,

$$L(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 21x - 20\,.$$

Calculando a derivada primeira da função lucro, em relação a x, temos

$$L'(x) = -x^2 + 4x + 21 \text{ e } L''(x) = -2x + 4\,.$$

Agora, para calcular os pontos críticos de L é só igualar $L'(x)$ a zero, ou seja, $L'(x) = 0$ e vem $-x^2 + 4x + 21 = 0$. Resolvendo esta equação pela fórmula de Bháskara, temos as raízes $x = -3$ e $x = 7$.

Logo, $x = -3$ e $x = 7$ são os pontos críticos de L.

Vamos determinar agora os extremos relativos de L.

Para $x = -3$, temos $L''(-3) = (-2)\cdot(-3) + 4 = 10 > 0$, logo, é um ponto de mínimo relativo de L.

Para $x = 7$, temos $L''(7) = -2\cdot 7 + 4 = -10 < 0$, logo, é um ponto de máximo relativo de L.

Portanto, a quantidade a ser produzida e vendida para dar o máximo lucro mensal é $x = 7$.

3.9 - O Método de Newton

O método de Newton serve para encontrar soluções aproximadas de equações da forma f(x) 0, em que f(x) representa uma função diferenciável. Trata-se de um método iterativo que consiste em definir recursivamente uma sucessão de aproximações (x_n) convergindo, sob condições bastante gerais, para uma solução da equação f(x) = 0. A sucessão (x_n) fica determinada por um palpite ou aproximação inicial x_0. Para cada aproximação x_n de uma raiz z de f(x)=0, o termo seguinte x_{n+1} será uma aproximação ainda melhor da mesma raiz z. Em geral os erros $|\, x_n - z|$ convergem muito rapidamente para zero. A convergência, habitualmente referida como quadrática, é caracterizada por cada erro $|\, x_{n+1} - z|$ ter uma ordem de grandeza comparável com o quadrado do erro anterior $|\, x_n - z|^2$. A ideia do método consiste em obter a aproximação x_{n+1} a partir da aproximação anterior resolvendo a equação de primeira ordem $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n = 0$, cuja solução explícita é $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

Observe que $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n = 0$ não é mais do que o polinômio de Taylor de primeiro grau da função f(x) no ponto x_n. Logo, numa vizinhança de x_n, tem-se $f(x) \approx f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n)$, se $x \approx x_n$.

Geometricamente x_{n+1} corresponde à interseção com o eixo das abscissas da reta tangente ao gráfico de f(x) em $(x_n, f(x_n))$.

Exemplo 1:

Começando com $x_1 = 2$, encontre a terceira aproximação x_3 para a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Solução: Vamos aplicar o Método de Newton com

$$f(x)=x^3 - 2x - 5 \text{ e } f'(x) = 3x^2 - 2.$$

O próprio Newton usou essa equação para ilustrar seu método, e escolheu $x_1 = 2$ após alguns experimentos, pois $f(1) = -6$, $f(2) = -1$ e $f(3) = 16$. A Equação 2 fica

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 5}{3x_n^2 - 2}$$

Com $n = 1$, temos

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 - 2x_1 - 5}{3x_1^2 - 2}$$

$$= 2 - \frac{2^3 - 2(2) - 5}{3(2)^2 - 2} = 2{,}1$$

Então com $n = 2$, obtemos

$$x_3 = x_2 - \frac{x_2^3 - 2x_2 - 5}{3x_2^2 - 2}$$

$$= 2{,}1 - \frac{(2{,}1)^3 - 2(2{,}1) - 5}{3(2{,}1)^2 - 2} \approx 2{,}0946$$

Resulta que essa terceira aproximação $x_3 \approx 2{,}0946$ é precisa até quatro casas decimais.

Exemplo 2

Obter o método de Newton para obter a raiz positiva s equação $x^2=9$, começando pela primeira aproximação de 4.

Solução: Escrevemos a equação como $x^2 - 9 = 0$ e expressamos

$$f(x) = x^2 - 9$$
$$f'(x) = 2x$$

Substituindo os valores , obtemos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 9}{2x_n}$$

Começamos com $x_1 = 4$.

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - 9}{2x_1} \qquad\qquad x_3 = x_2 - \frac{x_2^2 - 9}{2x_2}$$

$$= 4 - \frac{16 - 9}{8} \qquad\qquad = 3,125 - \frac{(3;125)^2 - 9}{2(3,125)}$$

$$= 3,125 \qquad\qquad = 3,0025$$

$$x_4 = x_3 - \frac{x_3^2 - 9}{2x_3} \qquad\qquad x_5 = x_4 - \frac{x_4^2 - 9}{2x_4}$$

$$= 3,0025 - \frac{(3,0025)^2 - 9}{2(3,0025)} \qquad\qquad = 3,0000 - \frac{(3,0000)^2 - 9}{2(3,0000)}$$

$$= 3,0000 \qquad\qquad = 3,0000$$

Certamente, todas as aproximações sucessivas serão 3,0000. Assim, a raiz positiva da equação $x^2 - 9 = 0$ será 3,0000, até a quarta casa decimal.

Observe que se x_n for uma solução de $f(x) = 0$, $f(x_n) = 0$. Assim,

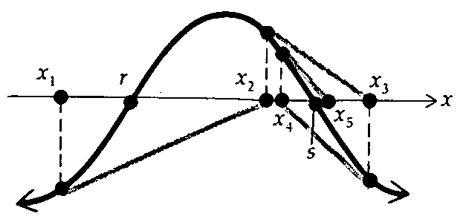
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$= x_n - 0$$

$$= x_n$$

Consequentemente, todas as aproximações são iguais a x_n. Note que essa situação ocorre nesse exemplo, em que todas as aproximações após e incluindo x_4 têm o mesmo valor com quatro casas decimais. Observe também que $x_{n+1} = x_n$ implica $f(x_n)=0$. Assim sendo, podemos concluir que se duas aproximações sucessivas forem iguais, temos então uma aproximação para um zero de f.

Se, no entanto, a escolha inicial de x_1 não for suficientemente próxima do zero desejado, é possível que se obtenha aproximações para outro zero.



Assim, quando da aplicação do Método de Newton, deve-se inicialmente fazer um rápido esboço do gráfico da função para obter sua aproximação inicial. O gráfico deve ser consultado para assegurar que se está obtendo aproximações sucessivas do zero desejado.

Quando o Método de Newton for utilizado para resolver uma equação da forma f(x) = 0, deve-se fazer o seguinte:

1. Escolha *adequadamente* a primeira aproximação x_1. Um esboço rápido do gráfico de f irá ajudá-lo a obter uma escolha razoável.
2. Com o valor de x_1 na fórmula (1), obtenha uma segunda aproximação x_2. Então, use x_2 em (1) a fim de obter uma terceira aproximação x_3, e assim por diante, até que $x_{n+1} = x_n$ com a precisão desejada.

Exemplo 3:

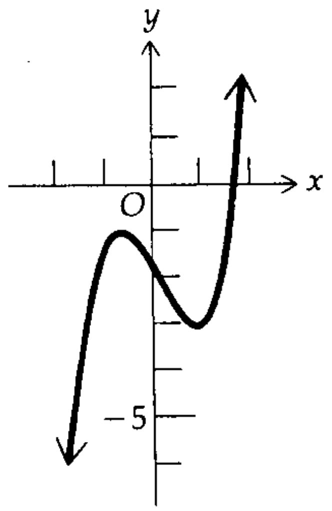
Use o Método de Newton para encontrar a raiz real da equação $x^3 - 2x - 2 = 0$ com quatro casas decimais.

Solução:

Seja $f(x) = x^3 - 2x - 2$; assim $f'(x) = 3x^2 - 2$.

Então, temos:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$$



Para obter um esboço do gráfico de f, colocamos os pontos $(-2, -6)$, $(-1, -1)$, $(0, -2)$, $(1, -3)$, e $(2, 2)$. Há extremos relativos de f quando $f'(x) = 0$, isto é, quando $x = \pm \frac{1}{3}\sqrt{6}$.

Pode-se observar que como o gráfico da figura intersecta o eixo x num único ponto, existe somente uma raiz real da equação dada.

Como $f(1) = -3$ e $f(2) = 2$, essa raiz está entre 1 e 2. Uma escolha adequada para nossa primeira aproximação é $x_1 = 1,5$. A Tabela 1 mostra as aproximações sucessivas calculadas de (3) com esse x_1. Queremos que a raiz seja precisa até a quarta casa decimal; assim sendo, usamos cinco casas decimais nos nossos cálculos. Como x_5 e x_6 são iguais (até cinco casas decimais), arredondamos esse número para quatro casas decimais, obtendo 1,7693 como sendo a raiz procurada.

Tabela 1

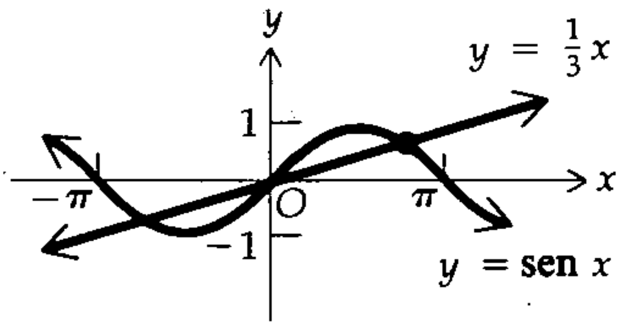
n	x_n	$x_n^3 - 2x_n - 2$	$3x_n^2 - 2$	$\dfrac{x_n^3 - 2x_n - 2}{3x_n^2 - 2}$	x_{n+1}
1	1,50000	−1,62500	4,75000	−0,34211	1,84211
2	1,84211	0,56674	8,18011	0,06928	1,77283
3	1,77283	0,02621	7,42878	0,00353	1,76930
4	1,76930	0,00006	7,39127	0,00001	1,76929
5	1,76929	−0,00002	7,39116	0,00000	1,76929

Exemplo 4:

Use o Método de Newton para encontrar, com três casas decimais, a coordenada x do ponto de interseção no primeiro quadrante da reta $y = \frac{1}{3}x$ e a curva $y = sen\, x$.

Solução:

A figura a seguir mostra a reta e a curva.



Queremos encontrar o valor positivo de x para o qual $senx = \frac{1}{3}x$.

$$3senx = x \Rightarrow 3senx - x = 0$$

Seja

$$f(x) = 3\,\text{sen}\,x - x$$

$$f'(x) = 3\cos x - 1$$

Da fórmula ,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1}$$

Pelo gráfico, parece que uma escolha razoável para x_1 é 2. Calculam-se as aproximações sucessivas usando a fórmula, elas se encontam na tabela 2 abaixo. Os cálculos foram feitos com quatro casas decimais. Observando que x_4 e x_5 são iguais a 2,2789. Dessa forma, o valor positivo de x para o qual $senx = \frac{1}{3}x$, com tres casas decimais é 2,279.

Tabela 2

n	x_n	$3\,\text{sen}\,x_n - x_n$	$3\cos x_n - 1$	$\frac{3\,\text{sen}\,x_n - x_n}{3\cos x_n - 1}$	x_{n+1}
1	2,0000	0,7279	−2,2484	−0,3237	2,3237
2	2,3237	−0,1346	−3,0513	0,0441	2,2796
3	2,2796	−0,0022	−2,9528	0,0007	2,2789
4	2,2789	−0,0001	−2,9512	0,0000	2,2789

Tabela de Derivadas	
f	f'
k, c/ $k \in \mathbb{R}$	0
$u + v$	$u' + v'$
ku, c/ $k \in \mathbb{R}$	ku'
uv	$u'v + uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
u^α, c/ $\alpha \in \mathbb{R}$	$\alpha u' u^{\alpha - 1}$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
a^u, c/ $a \in \mathbb{R}^+$	$u' a^u \ln a$
$\log_a u$, c/ $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$	$\frac{1}{\ln a} \frac{u'}{u}$
$\operatorname{sen} u$	$u' \cos u$
$\cos u$	$-u' \operatorname{sen} u$
$\operatorname{tg} u$	$u' \sec^2 u$
$\operatorname{cotg} u$	$-u' \operatorname{cosec}^2 u$
$\sec u$	$u' \sec u \operatorname{tg} u$
$\operatorname{cosec} u$	$-u' \operatorname{cosec} u \operatorname{cotg} u$
$\operatorname{arcsen} u$	$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\arccos u$	$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
$\operatorname{arctg} u$	$\frac{u'}{1+u^2}$
$\operatorname{arccotg} u$	$-\frac{u'}{1+u^2}$

AVALIAÇÃO C_1

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do terceiro módulo.

Nome do (a) cursista: ____

1ª. Questão:

Determine a derivada do polinômio $x^4 - 12x^3 + 2x^2 + x - 1$.

2ª. Questão:

Calcule a derivada do produto das funções $f(x) = x^2 + 2x + 1$ e $g(x) = 2x - 1$.

3ª. Questão:

Encontre a derivada do quociente de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ por $g(x) = 2x - 1$.

4ª. Questão:

Calcule a derivada de $e^x . \ln x$.

5ª. Questão:

Derive $h(x) = (2x + 1)^6$.

AVALIAÇÃO C_2

Esta avaliação corresponde a 50% da nota do terceiro módulo.

Nome do (a) cursista: ____

1ª. Questão:

Calcule a derivada da função f(x) = x^2 .sen (5x) .

2ª. Questão:

Calcule a derivada da função $f(x) = \frac{1}{(1 - x\ )^5}$.

3ª. Questão:

Um Agricultor tem 2400 m de rede para cercar um campo retangular que está na margem de um rio. Ele não precisa de cerca ao longo do rio. Quais são as dimensões do campo que tem maior área?

4ª. Questão:

Uma lata cilíndrica é feita para receber 1 litro de óleo. Quais as dimensões da lata, de modo a minimizar o metal gasto na sua fabricação.

5ª. Questão:

Seja f uma função de domínio R, com derivada finita em todos os pontos do seu domínio. Na figura a seguir encontra-se parte do gráfico de f', função derivada de f. Sabe-se ainda que f (0) = 2. Qual pode ser o valor de f (3)?

A) 1 B) 2 C) 5 D) 7